Θέματα στην συνέχεια

1. Σωστό – Λάθος στις πανελλήνιες:

i. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής στο (α,β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α,β] μία μέγιστη τιμή. Μονάδα 1

ii. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] με f(α)<0 και υπάρχει ξ∈(α,β) ώστε f(ξ)=0,τότε κατ' ανάγκη f(β)>0. Μονάδες 2

iii. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε x∈Δ, ή είναι αρνητική για κάθε x∈Δ, δηλαδή διατηρεί σταθερό πρό-σημο στο διάστημα Δ. Μονάδες 2

iv. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε αυτή είναι θετική για κάθε x∈Δ, ή είναι αρνητική για κάθε x∈Δ, δηλαδή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ. Μονάδες 2

v. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα. Μονάδες 2

vi. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. Μονάδες 2

vii. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησί-ως φθίνουσα σε ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β) όπου

Α= $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ και Β= $\lim\limits_{x\to \beta^-} f(x)$. Μονάδες 2

viii. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. Μονάδες 2

2. Πανελλήνιες θετική κατ. 1980:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|(x-1)}{x}, & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$.

Να εξεταστεί ως προς την συνέχεια και να γίνει η γραφική της παράσταση.

3. Θέμα 2ον 1983 (Οικονομικό):

Να εξετάσετε ως προς την συνέχεια τις συναρτήσεις με τύπους:

i) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4x^2-9x+2}{x-2}, & \text{αν } x\in R-\{2\} \\ 7 & \text{αν } x=2 \end{cases}$ στο x_o=2.

ii) $g(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } x\geq 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{αν } x<0 \end{cases}$ στο x_o=0.

4. Μαθηματικό Αθηνών:

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f με |f(x)|≤|x| για κάθε x∈R, είναι συνεχής στο x_o=0.

ii) Αν η g είναι συνεχής στο x_o=0 με g(0)=0 και |f(x)|≤|g(x)| για κάθε x∈R, να δείξετε ότι και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_o=0.

5. Φυσικό Θες/νίκης:

Δίνεται η συνάρτηση f, για την οποία ισχύει |συνx-1|≤f(x)≤|x| για κάθε x∈R.

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_o=0.

ii) Να εξετάσετε το ίδιο πρόβλημα εάν

e^x-1≤f(x)≤x για κάθε x∈R.

6. Μαθηματικό Πατρών:

Δίνεται η συνάρτηση f:R→R, για την οποία ισχύει f(x+y)=f(x)+f(y)+λxy για κάθε x,y∈R και λ∈R μια σταθερά. Αν η f είναι συνεχής στο x_0=0, να δειχθεί ότι είναι συνεχής στο R.

7. Προτεινόμενο:

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+(\alpha^2-2)x^2+(\alpha-1)x-\alpha^2=0$, α∈R*, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,2).

8. Προτεινόμενο:

Έστω p,q∈R_+^* και η συνάρτηση f:[α,β]→R, συνεχής στο [α,β] με f(α)≠f(β). Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον x_o∈(α,β) τέτοιο ώστε $f(x_o)=\dfrac{pf(\alpha)+qf(\beta)}{p+q}$.

9. Προτεινόμενο:

Έστω f:[0,1]→[0,1], g:[0,1]→[0,1] συνεχείς συ-ναρτήσεις στο [0,1], με g(0)=0 και g(1)=1. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη στο διάστημα [0,1].

10. Προτεινόμενο:

Δίνεται η συνάρτηση f με f(χ)=$\dfrac{\chi^3}{16}$-ημπχ+7. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση παίρνει την τιμή $7/2$ στο διάστημα [-4,4].

11. Προτεινόμενο:

Δίνεται η συνάρτηση f με f(χ)=$\dfrac{\chi^3}{4}$-ημπχ+3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση παίρνει την τιμή $8/3$ στο διάστημα [-2,2].

12. Προτεινόμενο:

Δίνεται η συνάρτηση f:[0,1]→Q (όπου Q το σύνολο των ρητών αριθμών), που είναι συνεχής στο [0,1],με f($^5/_8$)=$^5/_8$. Να δείξετε ότι η συνάρ-τηση f είναι σταθερή.

13. Θέματα πολλών εξετάσεων:

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\eta\mu\dfrac{1}{x} & \text{αν } x\neq 0 \\ 0 & \text{αν } x=0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο R.

14. <u>Πανελλήνιες θετική κατ. 1979</u>:

α) Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της; Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα διάστημα;

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x} & \mathbf{\alpha\nu\ x\neq 0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\alpha\nu\ x=0} \end{cases}$ είναι συνεχής στο R.

15. <u>Θέματα πολλών εξετάσεων</u>:

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $|f(x)-f(y)|\leq|x-y|$ για κάθε $x,y\in R$, είναι συνεχής στο R.

16. <u>Προτεινόμενο</u>:

Έστω $f:R\to R$ μια πολυωνυμική συνάρτηση με $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $\alpha_0\alpha_\nu<0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα.

17. <u>Προτεινόμενο</u>:

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0,2]\to R$ τέτοια ώστε $f(0)=f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x,y\in[0,2]$ τέτοιοι ώστε $|x-y|=1$ και $f(x)=f(y)$.

18. <u>Μαθηματικό Αθηνών</u>:

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g:\Delta\to R$ όπου Δ είναι ένα διάστημα και $\chi_o\in\Delta$. Αν $f(\chi_o)\neq g(\chi_o)$ και $f(\chi)=g(\chi)$ για κάθε $\chi\in\Delta-\{\chi_o\}$, να δείξετε ότι δεν είναι δυνατόν οι f,g να είναι ταυτόχρονα συνεχείς στο Δ.

19. END