ΥΠΕΡΒΟΛΗ ΤΡΑΠΕΖΑ ΟΛΑ ΛΥΣΕΙΣ

16128 ΘΕΜΑ 2

α) Καθώς η υπερβολή έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, θα είναι $\alpha^2=16$ και $\beta^2=9$, οπότε $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=25$, άρα $\gamma=5$. Έτσι, οι εστίες είναι τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$.

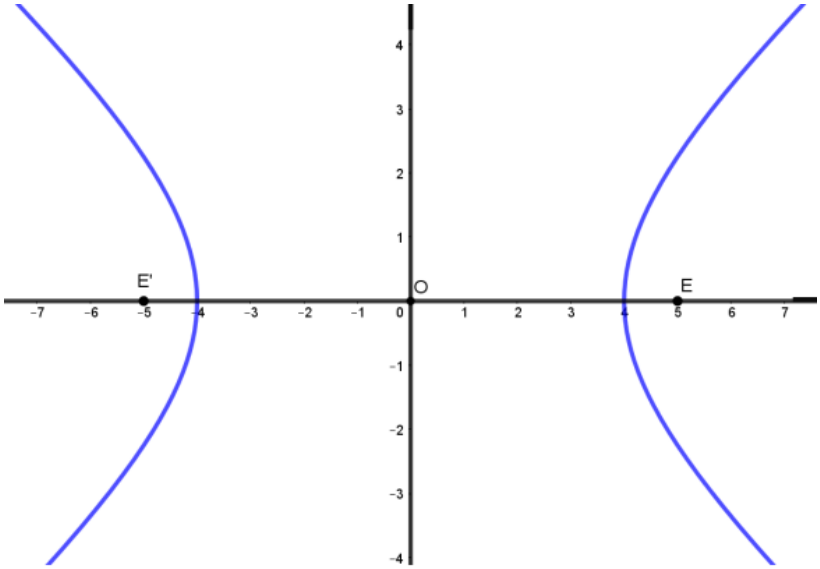
β) Από τον ορισμό της υπερβολής γνωρίζουμε ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων ενός σημείου της υπερβολής από τις εστίες ισούται με 2α.

Έτσι, θα έχουμε ότι $|(NE')-(NE)|=2\cdot 4=8$.

γ) Γνωρίζουμε ότι η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(-\alpha,0)$ και $(\alpha,0)$, δηλαδή στα σημεία $(-4,0)$ και $(4,0)$.

Επίσης, δεν τέμνει τον άξονα y'y, αφού αν αυτό συνέβαινε θα είχαμε $0-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, αδύνατο.

Έτσι, έχουμε το παρακάτω σχήμα.



17942 ΘΕΜΑ 2

α) Η εξίσωση (C) ανήκει σε υπερβολή, διότι είναι της μορφής $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha=2,\beta=3$.

Οι εστίες της έχουν συντεταγμένες $E(\gamma,0),E'(-\gamma,0)$

όπου $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2\Leftrightarrow\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=4+9=13$. Οπότε $E(\sqrt{13},0),E'(-\sqrt{13},0)$.

β) Για $x=1,y=2022$ η εξίσωση (C) γίνεται:

$\frac{1^2}{4}-\frac{2022^2}{9}=36\Leftrightarrow 9-4\cdot 2022^2=36^2\Leftrightarrow 4\cdot 2022^2=9-36^2<0$, η οποία δεν μπορεί να ισχύει.

Άρα το σημείο Μ δεν μπορεί να ανήκει στην υπερβολή.

Γενικότερα, είναι γνωστό ότι για μία υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ ισχύει ότι $x\le -a$ ή $x\ge a$.

21649 ΘΕΜΑ 2

α) Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ οπότε έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\gamma=5$. Αφού έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$ συμπεραίνουμε ότι $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow\frac{5}{\alpha}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow\alpha=4$. Από τη σχέση $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$ έχουμε ότι $5^2=4^2+\beta^2\Leftrightarrow\beta^2=9\overset{\beta>0}{\Leftrightarrow}\beta=3$. Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

β) Οι εξισώσεις των ασύμπτωτων της C είναι $y=\frac{\beta}{\alpha}x\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x$ και $y=-\frac{\beta}{\alpha}x\Leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x$.

γ) Η εφαπτόμενη στο $M(5,\frac{9}{4})$ έχει εξίσωση $\frac{5\cdot x}{25}-\frac{\frac{9}{4}\cdot y}{9}=1\Leftrightarrow\frac{x}{5}-\frac{y}{4}=1$.

21651 ΘΕΜΑ 2

α) Η C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ οπότε έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\gamma=5$. Αφού διέρχεται από το σημείο $A(4,0)$ έχουμε ότι $\frac{4^2}{\alpha^2}-\frac{0^2}{\beta^2}=1\Leftrightarrow\frac{16}{\alpha^2}=1\Leftrightarrow\alpha^2=16$ και επειδή $\alpha>0$ έχουμε τελικά ότι $\alpha=4$.

Συνεπώς έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{5}{4}$.

β) Από τη σχέση $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$ έχουμε ότι $5^2=4^2+\beta^2\Leftrightarrow\beta^2=9$ και επειδή $\beta>0$ έχουμε $\beta=3$.

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

γ) Η εφαπτόμενη στο $M(5,\frac{9}{4})$ έχει εξίσωση $\frac{5\cdot x}{16}-\frac{\frac{9}{4}\cdot y}{9}=1\Leftrightarrow\frac{5x}{16}-\frac{y}{4}=1$.

22051ΘΕΜΑ 2

α) Γενικά, οι εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ και $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$.

Εδώ είναι $\alpha=\beta=1$.

Οπότε, οι ασύμπτωτες ευθείες ε_1 και ε_2 της δοθείσας υπερβολής είναι $\varepsilon_1: y=x$ και $\varepsilon_2: y=-x$

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι οι ασύμπτωτες ευθείες ε_1 και ε_2 της δοθείσας υπερβολής είναι $\varepsilon_1: y = x$ και $\varepsilon_2: y = -x$ και συνεπώς οι αντίστοιχες κλίσεις είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$. Άρα, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. Επομένως, $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

22169 ΘΕΜΑ 2

α)

i. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι η $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$. Εφόσον η $y = \frac{3}{4}x$ είναι ασύμπτωτη και α,β > 0, έχουμε ότι $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{4}$ δηλαδή 4β = 3α ή $\beta = \frac{3}{4}\alpha$. (1)

Η απόσταση των κορυφών της ΑΑ' είναι ίση με 2α, οπότε 2α = 8, άρα α = 4. (2)

Από (1) και (2) έχουμε ότι $\beta = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$.

Επομένως η εξίσωση της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ γίνεται $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ ή $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

ii. $\alpha^2+\beta^2 = \gamma^2$ και από το αi) ερώτημα έχουμε ότι α = 4 και β = 3. Επομένως $4^2+3^2 = \gamma^2$ ή $\gamma^2 = 25$ ή γ = 5.

Οι εστίες είναι της μορφής Ε(γ,0) και Ε'(-γ,0), επομένως Ε(5,0) και Ε'(-5,0).

β) Η εφαπτόμενη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της (x_1, y_1) δίνεται από τον τύπο

$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$ ή $\frac{xx_1}{16} - \frac{yy_1}{9} = 1$. Στο σημείο $(5, \frac{9}{4})$ θα έχουμε $\frac{5x}{16} - \frac{\frac{9}{4}y}{9} = 1$ ή $\frac{5x}{16} - \frac{y}{4} = 1$.

22196 ΘΕΜΑ 2

α) Η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1$$

Επομένως, είναι $\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = 5$, $\beta^2 = 25 \Leftrightarrow \beta = 5$ και $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 25 + 25 = 50$.

Άρα, $\gamma = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία Ε(γ,0), Ε΄(-γ,0), δηλαδή:

$$E(5\sqrt{2},0),\ E'(-5\sqrt{2},0)$$

β) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

είναι οι ευθείες

$$(\varepsilon_1): y = \frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): y = -\frac{\beta}{\alpha}x$$

δηλαδή

$$(\varepsilon_1): y = x \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): y = -x$$

γ) Οι ευθείες (ε_1), (ε_2) έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$ αντίστοιχα. Αφού $\lambda_1\lambda_2 = -1$, συμπεραίνουμε ότι οι ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2) είναι κάθετες. Η καμπύλη της υπερβολής, οι εστίες Ε, Ε΄ της και οι ασύμπτωτες απεικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα:

22269 ΘΕΜΑ 2

α) Η υπερβολή με εξίσωση : $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ (1) έχει $\alpha^2 = 4$ και $\beta^2 = 1$. Οι εστίες της βρίσκονται στον άξονα x'x και έχουν συντεταγμένες Ε(γ, 0) και Ε'(-γ, 0), όπου $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{5}$.

i. Οι εστίες της υπερβολής έχουν συντεταγμένες $E(\sqrt{5}, 0)$ και $E'(-\sqrt{5}, 0)$.

ii. Η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

iii. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = \frac{\beta}{\alpha}x = \frac{1}{2}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x = -\frac{1}{2}x$.

β) Η εξίσωση της εφαπτόμενης της υπερβολής στο σημείο της με συντεταγμένες (x_1, y_1) θα έχει τη μορφή $\varepsilon : \frac{x x_1}{4} - y y_1 = 1 \Leftrightarrow xx_1 - 4yy_1 = 4$. Οπότε για $x_1 = \sqrt{5}$ και $y_1 = \frac{1}{2}$ στην εξίσωση της ευθείας ε θα έχουμε $\varepsilon : \sqrt{5}\cdot x - 4\cdot\frac{1}{2}y = 4$ ή $\varepsilon : \sqrt{5}\cdot x - 2y = 4$.

22559 ΘΕΜΑ 2

α) Επειδή η υπερβολή έχει τις εστίες της $E'(-10, 0)$, $E(10, 0)$ και τις κορυφές της $A'(-8, 0)$, $A(8, 0)$ στον άξονα x'x, η εξίσωση της είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

Είναι $\gamma = 10$ και $\alpha = 8$, άρα

$\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$

$\beta^2 = 10^2 - 8^2$

$\beta^2 = 36$

$\beta = 6$.

Επομένως η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

β) i) Το Μ είναι σημείο της υπερβολής, αν και μόνο αν η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων του Μ από τις εστίες Ε΄ και Ε είναι 2α, δηλαδή $|(ME') - (ME)| = 2\alpha$.

Επειδή $\alpha = 8$, θα είναι $|(ME') - (ME)| = 16$.

ii) Δίνεται $(ME) = 9$ οπότε έχουμε:

$|(ME') - 9| = 16$

$(ME') - 9 = -16$ ή $(ME') - 9 = 16$

$(ME') = -7$ ή $(ME') = 25$

και επειδή $(ME') > 0$ θα είναι $(ME') = 25$.

22561 ΘΕΜΑ 2

α) i) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι οι ευθείες $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ και $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$.

Επειδή $C: x^2-y^2=9$ είναι $\alpha^2=\beta^2=9$, άρα $\alpha=\beta=3$, οπότε οι ασύμπτωτες της C είναι οι ευθείες $\delta_1: y=\frac{3}{3}x$ ή $\delta_1: y=x$ και $\delta_2: y=-\frac{3}{3}x$ ή $\delta_2: y=-x$.

ii) Η εφαπτομένη ε της υπερβολής $C: x^2-y^2=9$ στο σημείο της $M(5,4)$, έχει εξίσωση $\varepsilon: xx_1-yy_1=9$ ή $\varepsilon: 5x-4y=9$.

β) Τα σημεία τομής της $\varepsilon: 5x-4y=9$ με τις $\delta_1: y=x$ και $\delta_2: y=-x$, προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεών τους. Επομένως θα έχουμε

$$\begin{cases}5x-4y=9\\ y=x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}5x-4x=9\\ y=x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=9\\ y=9\end{cases}$$

και

$$\begin{cases}5x-4y=9\\ y=-x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}5x+4x=9\\ y=-x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}9x=9\\ y=-x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}.$$

Επομένως το σημείο τομής των ε και δ_1 έχει συντεταγμένες $(9,9)$ και το σημείο τομής των ε και δ_2 έχει συντεταγμένες $(1,-1)$.

22566 ΘΕΜΑ 2

α) Η υπερβολή γράφεται

$$4x^2-y^2=4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1,$$

άρα η υπερβολή είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με εστίες και κορυφές στον άξονα $x'x$, και έχει $\alpha^2=1$ άρα $\alpha=\pm1$

επομένως οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι τα σημεία Α(α,0) και Α΄(-α,0) δηλαδή

$$A(1,0) \text{ και } A'(-1,0)$$

β) Σύμφωνα με τον μνημονικό κανόνα για τον υπολογισμό των ασύμπτωτων τις υπερβολής, παραγοντοποιούμε το πρώτο μέλος της εξίσωσής της και εξισώνουμε κάθε παράγοντα με το μηδέν. Έχουμε $4x^2-y^2=(2x-y)(2x+y)$, άρα οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι:

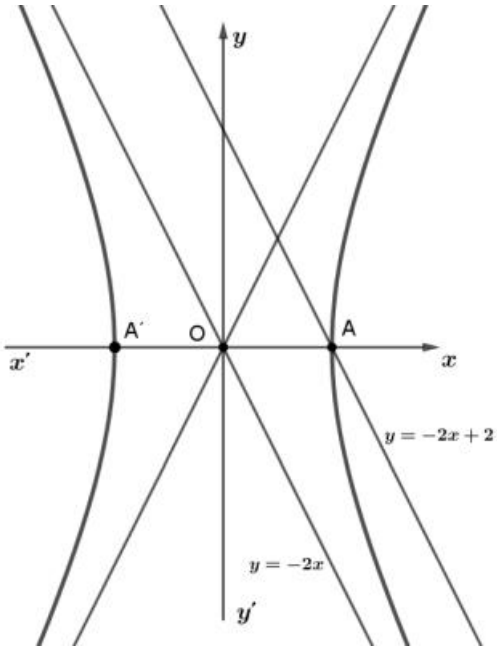
$$2x-y=0 \quad \text{και} \quad 2x+y=0$$

δηλαδή

$$y=2x \quad \text{και} \quad y=-2x$$

γ) Η ευθεία που είναι παράλληλη της ασύμπτωτης $y=-2x$, και διέρχεται από το $A(1,0)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = - 2, άρα έχει εξίσωση

$$y-0=-2(x-1) \Leftrightarrow y=-2x+2$$



22567 ΘΕΜΑ 2

α) i) Η υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $A'(-\alpha\,,0)$ και $A(\alpha\,,0)$. Δίνεται $A'(-4\,,0)$ και $A(4\,,0)$, άρα θα έχουμε $\alpha=4$.

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι οι ευθείες $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ και $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$.

Δίνεται ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι ευθείες $y=\frac{3}{4}x$ και $y=-\frac{3}{4}x$,

άρα θα έχουμε $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3}{4}$ και επειδή $\alpha=4$, προκύπτει $\beta=3$.

ii) Οι εστίες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι τα σημεία $E'(-\gamma\,,0)$ και $E(\gamma\,,0)$.

Είναι

$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$

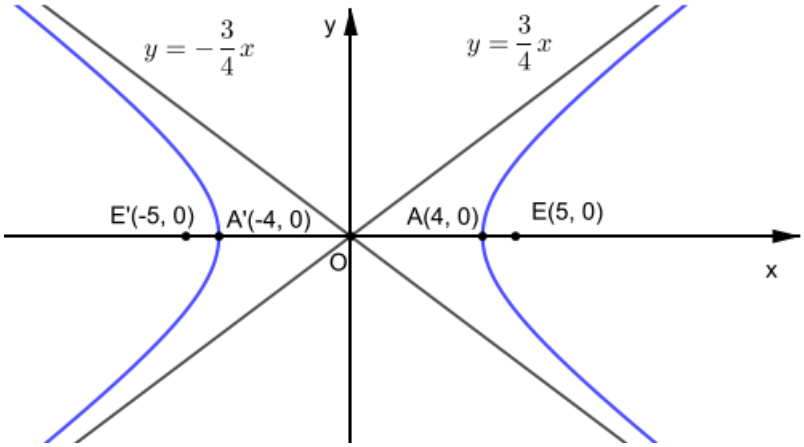
$\gamma^2=4^2+3^2$

$\gamma^2=25$

$\gamma=5$.

Επομένως οι εστίες της υπερβολής είναι τα σημεία $E'(-5\,,0)$ και $E(5\,,0)$.

β)



17944 ΘΕΜΑ 3

α) Ισχύει ότι η εστιακή απόσταση είναι $2\gamma=2\sqrt{7}\Leftrightarrow\gamma=\sqrt{7}$.

Για την εκκεντρότητα της υπερβολής ισχύει ότι $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}>1\Leftrightarrow\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{a}\Leftrightarrow a=2$.

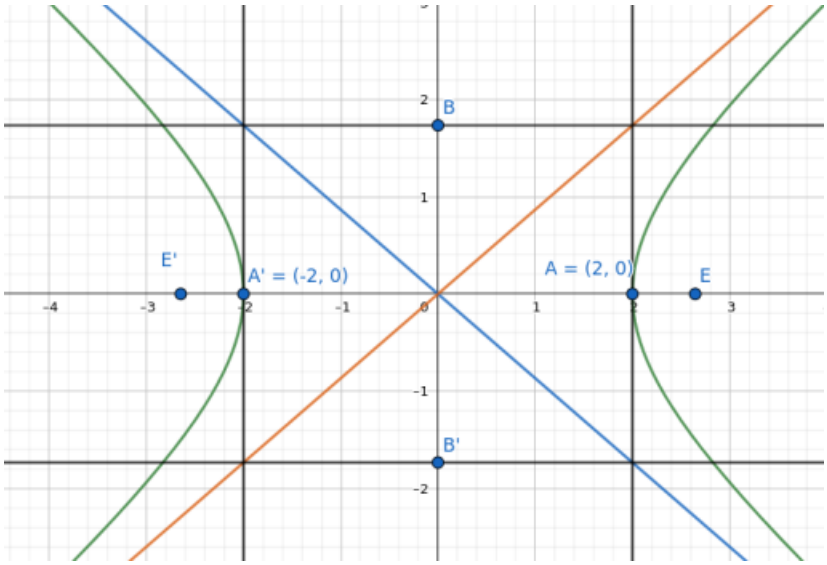
Για τους συντελεστές α,β ισχύει ότι $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2=\sqrt{7}^2-2^2=3\Leftrightarrow\beta=\sqrt{3}$.

β) i) Οι κορυφές της υπερβολής έχουν συντεταγμένες $A(\alpha,0),A'(-\alpha,0)$, άρα θα είναι οι $A(2,0),A'(-2,0)$.

ii) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι $\varepsilon_1: y=-\frac{\beta}{a}x,\varepsilon_2: y=\frac{\beta}{a}x$ οπότε θα έχουμε:

$\varepsilon_1: y=\frac{-\sqrt{3}}{2}x,\varepsilon_2: y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

γ) Η γραφική παράσταση και τα υπόλοιπα στοιχεία φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



20653 ΘΕΜΑ 4

α) Έστω $t\ sec$ ο χρόνος που μεσολάβησε από τη στιγμή της εκπυρσοκρότησης μέχρι τη στιγμή που την άκουσε ο παρατηρητής M_2. Τότε ο αντίστοιχος χρόνος για τον M_1 θα είναι $t+4$ sec. Άρα $(PM_2)=340\cdot t$ και $(PM_1)=340\cdot(t+4)=340\cdot t+1360$.

Ώστε $(PM_1)-(PM_2)=1360\ m$.

β) Γνωρίζουμε ότι όλα τα σημεία P που ικανοποιούν τη σχέση $|(PM_1)-(PM_2)|$ =σταθερή, ανήκουν σε δύο κλάδους υπερβολής με εστίες τα σταθερά σημεία M_1 και M_2. Άρα η θέση P του αγνοούμενου θα ανήκει σε έναν κλάδο υπερβολής με εστίες τα M_1 και M_2 και προφανώς σε αυτόν που βρίσκεται πιο κοντά στον παρατηρητή M_2.

γ) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Εδώ είναι $2\alpha=1360$, οπότε $\alpha=680$. Η απόσταση (M_1M_2) είναι 2γ, άρα $\gamma=1378:2=689$.

Όμως $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 689^2 - 680^2 = (689+680)(689-680) = 1369 \cdot 9 = 37^2 \cdot 3^2 = 111^2$.

21656 ΘΕΜΑ 4

α) Η υπερβολή C έχει κέντρο το $(0,0)$ και εστίες στον άξονα xx', οπότε θα έχει ασύμπτωτες της μορφής $y=\frac{\beta}{\alpha}x$, $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$ και εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

Αφού οι εστίες είναι $\mathrm{E}(5,0), \mathrm{E}'(-5,0)$ συμπεραίνουμε ότι $\gamma=5$ και αφού οι κορυφές της είναι τα σημεία $\mathrm{A}(4,0), \mathrm{A}'(-4,0)$ συμπεραίνουμε ότι $\alpha=4$. Επομένως από τη σχέση $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$ έχουμε ότι $5^2=4^2+\beta^2 \Leftrightarrow \beta^2=9 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta=3$. Τελικά

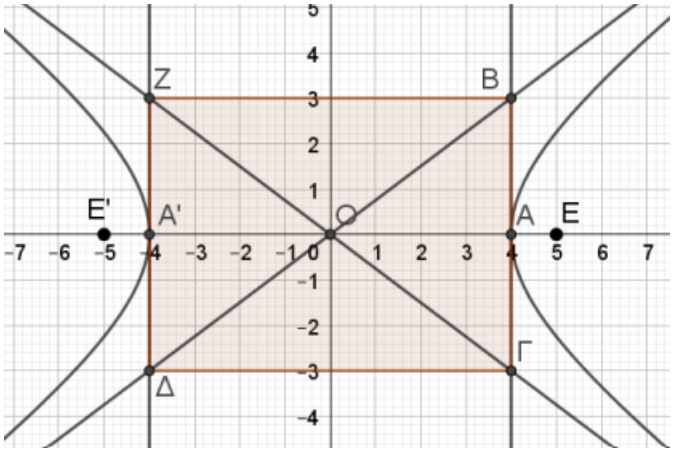
i. οι εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής C είναι $y=\frac{3}{4}x$, $y=-\frac{3}{4}x$

ii. η εξίσωση της υπερβολής C είναι $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

β) Οι κορυφές του ορθογωνίου βάσης είναι τα σημεία τομής των ασυμπτώτων της C με τις εφαπτόμενες της C στις κορυφές της, δηλαδή τα σημεία τομής των ευθειών $y=\frac{3}{4}x$, $y=-\frac{3}{4}x$ με τις ευθείες $x=4$, $x=-4$.

Τα σημεία αυτά είναι τα $\mathrm{B}(4,3), \Gamma(4,-3), \Delta(-4,-3), \mathrm{Z}(-4,3)$, ενώ οι ασύμπτωτες της C είναι οι διαγώνιες του ορθογωνίου βάσης.

Η υπερβολή C, οι ασύμπτωτες της C και το ορθογώνιο βάσης της C, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



γ) Από τον ορισμό της υπερβολής γνωρίζουμε ότι για κάθε σημείο M της C είναι $|(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')|=2\alpha$, οπότε $(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')=8$ (αν το M ανήκει στον κλάδο της C που είναι πιο κοντά στην εστία E') ή $(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')=-8$ (αν το M ανήκει στον κλάδο της C που είναι πιο κοντά στην εστία E).

δ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της υπερβολής, γνωρίζουμε ότι για κάθε σημείο της M, η διχοτόμος της γωνίας $E\hat{M}E'$ είναι η εφαπτομένη της στο M. Συνεπώς η ζητούμενη διχοτόμος είναι η εφαπτομένη της C στο $M(\sqrt{80},6)$, δηλαδή η ευθεία με εξίσωση $\frac{\sqrt{80}\cdot x}{16}-\frac{6y}{9}=1$.

21657 ΘΕΜΑ 4

α) Η υπερβολή C έχει κέντρο το $(0,0)$ και εστίες στον άξονα xx', οπότε θα έχει ασύμπτωτες της μορφής $y=\frac{\beta}{\alpha}x$, $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$. Αφού το ορθογώνιο βάσης είναι τετράγωνο, συμπεραίνουμε ότι $\alpha=\beta$ δηλαδή είναι ισοσκελής υπερβολή. Συνεπώς

i. οι εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής C είναι $y=x$, $y=-x$.

ii. για την εκκεντρότητα ε της C ισχύει ότι $\varepsilon^2=1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=1+1=2$ και επειδή $\varepsilon>0$ έχουμε τελικά ότι $\varepsilon=\sqrt{2}$.

β) Αφού η (ζ) είναι παράλληλη σε κάποια εκ των ασύμπτωτων της C, θα έχει εξίσωση της μορφής $y=x+\kappa$ ή $y=-x+\kappa$ με $\kappa\neq 0$. Η ισοσκελής υπερβολή C θα έχει εξίσωση της μορφής $x^2-y^2=\alpha^2$. Αφού διέρχεται από το σημείο $(2,0)$ έχουμε ότι $2^2-0^2=\alpha^2 \Leftrightarrow 4=\alpha^2 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha=2$.

Το πλήθος των κοινών σημείων της C και της ευθείας (ζ) είναι ίδιο με το πλήθος των λύσεων καθενός από τα συστήματα $\begin{cases} x^2-y^2=4 \\ y=x+\kappa \end{cases}$ και $\begin{cases} x^2-y^2=4 \\ y=-x+\kappa \end{cases}$.

Λύνουμε το 1ο σύστημα με αντικατάσταση της 2ης εξίσωσης στην 1η και έχουμε :

$$x^2-(x+\kappa)^2=4 \Leftrightarrow x^2-x^2-2x\kappa-\kappa^2=4 \Leftrightarrow -2x\kappa=4+\kappa^2 \overset{\kappa\neq 0}{\Leftrightarrow} x=-\frac{4+\kappa^2}{2\kappa}$$

και από τη 2η εξίσωση έχουμε ότι $y=-\frac{4+\kappa^2}{2\kappa}+\kappa$

Ομοίως λύνουμε το 2ο σύστημα με αντικατάσταση της 2ης εξίσωσης στην 1η και έχουμε :

$$x^2-(-x+\kappa)^2=4 \Leftrightarrow x^2-x^2+2x\kappa-\kappa^2=4 \Leftrightarrow 2x\kappa=4+\kappa^2 \overset{\kappa\neq 0}{\Leftrightarrow} x=\frac{4+\kappa^2}{2\kappa}$$

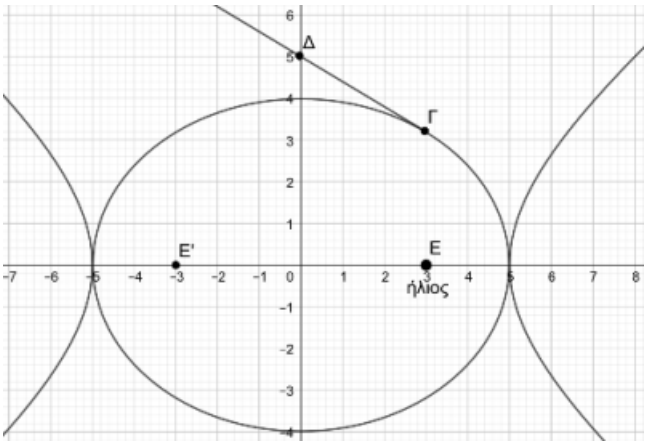
και από τη 2η εξίσωση έχουμε ότι $y=-\frac{4+\kappa^2}{2\kappa}+\kappa$

i. Σε κάθε περίπτωση το σύστημα έχει μοναδική λύση που σημαίνει ότι η (ζ) έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την C.

ii. Επειδή σε κάθε περίπτωση η μοναδική λύση του συστήματος προέκυψε από εξίσωση 1ου βαθμού και όχι από 2ου με διακρίνουσα 0, η ευθεία (ζ) δεν είναι εφαπτόμενη της C. Απλά την τέμνει σε ένα σημείο χωρίς όμως το σημείο αυτό να είναι σημείο επαφής . Δηλαδή η (ζ) διαπερνά τη C.

Σημείωση : το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει για κάθε υπερβολή και ευθεία παράλληλη σε κάποια από τις ασύμπτωτες και όχι μόνο για τις ισοσκελείς.

22174 ΘΕΜΑ 4



α) Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης είναι 2α, οπότε 2α =10, άρα α = 5.

Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι ε = $\frac{\gamma}{\alpha}$, οπότε $\frac{\gamma}{\alpha}=0,6$ ή $\frac{\gamma}{5}=0,6$ ή γ = 3.

Όμως $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$.

Η εξίσωση της έλλειψης δίνεται από τον τύπο $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, άρα $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

β)

i. Η εφαπτομένη της έλλειψης σε σημείο (x_1, y_1) δίνεται από τον τύπο $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$.

Εφόσον το σημείο επαφής είναι το Γ$\left(3,\frac{16}{5}\right)$ η εξίσωση της εφαπτομένης θα γίνει

$\frac{x3}{25}+\frac{y\frac{16}{5}}{16}=1$ ή $\frac{3x}{25}+\frac{y}{5}=1$. Για να διέρχεται από το σημείο Δ(0,5) θα πρέπει οι συντεταγμένες του σημείου να την επαληθεύουν. Πράγματι $\frac{3\cdot 0}{25}+\frac{5}{5}=1$ ή 1 = 1 που σημαίνει ότι η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο Δ.

ii. Σημεία συνάντησης των τροχιών είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεών τους εφόσον υπάρχουν. Οι εξισώσεις είναι $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ και $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$. Προσθέτοντας κατά μέλη $2\frac{x^2}{25}=2$ ή $x^2=25$ ή x = 5 επειδή x > 0. Η $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ για x = 5 μας δίνει

$\frac{5^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ή $1+\frac{y^2}{16}=1$ ή $\frac{y^2}{16}=0$ ή y = 0. Σημείο συνάντησης είναι το (5,0).

32206 ΘΕΜΑ 4

α) Η C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ οπότε έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\gamma=5$. Από τον ορισμό της υπερβολής γνωρίζουμε ότι $|(ME)-(ME')|=2\alpha$. Είναι

$$(ME)-(ME')=\sqrt{(5-5)^2+(\frac{9}{4}-0)^2}-\sqrt{(5+5)^2+(\frac{9}{4}-0)^2}=$$

$$\sqrt{\frac{81}{16}}-\sqrt{100+\frac{81}{16}}=\frac{9}{4}-\sqrt{\frac{1681}{16}}=\frac{9}{4}-\frac{41}{4}=-\frac{32}{4}=-8$$

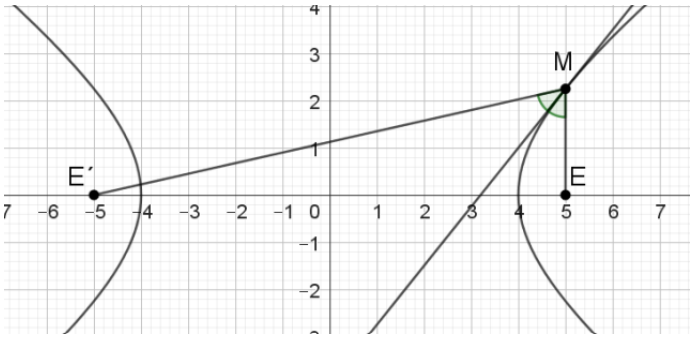
Συνεπώς $2\alpha=|-8|\Leftrightarrow\alpha=4$ οπότε έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{5}{4}$.

β) Από τη σχέση $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$ έχουμε ότι $5^2=4^2+\beta^2\Leftrightarrow\beta^2=9\overset{\beta>0}{\Leftrightarrow}\beta=3$.

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση της C είναι η $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

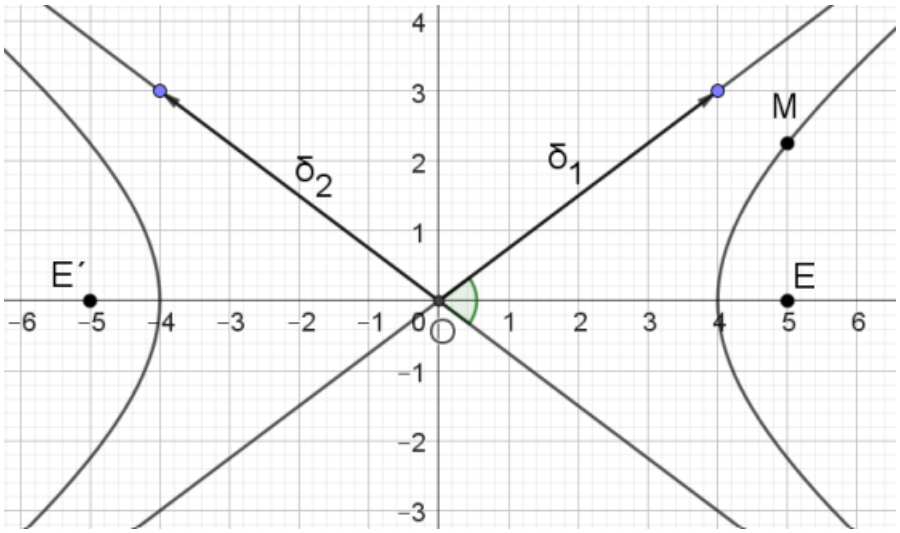
γ) Η διχοτόμος της γωνίας $E\hat{M}E'$ είναι η εφαπτόμενη στο $M(5,\frac{9}{4})$ που έχει εξίσωση

$$\frac{5\cdot x}{16}-\frac{\frac{9}{4}\cdot y}{9}=1\Leftrightarrow\frac{5x}{16}-\frac{y}{4}=1.$$



δ) Οι ασύμπτωτες της C έχουν εξισώσεις $\varepsilon_1: y=\frac{3}{4}x\Leftrightarrow 3x-4y=0$ και $\varepsilon_2: y=-\frac{3}{4}x\Leftrightarrow 3x+4y=0$. Τα διανύσματα $\vec{\delta}_1:(4,3)$ και $\vec{\delta}_2:(-4,3)$ είναι παράλληλα στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.

Είναι $\sigma\upsilon\nu(\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2)=\frac{\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1|\cdot|\vec{\delta}_2|}=\frac{-4\cdot4+3\cdot3}{\sqrt{(-4)^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{-16+9}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{25}}=\frac{-7}{25}$ οπότε το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ασύμπτωτές της C είναι $\frac{7}{25}$.


M
E´
E
O
δ2
δ1