

ΥΠΕΡΒΟΛΗ ΤΡΑΠΕΖΑ ΟΛΑ

16128 ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή (C) : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E' και E . (Μονάδες 10)

β) Αν το N είναι τυχαίο σημείο της (C) , να βρείτε την τιμή της διαφοράς $|(NE') - (NE)|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C) .

(Μονάδες 10)

17942 ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η κωνική τομή με εξίσωση (C) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής και να βρείτε μία εστία της. (Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(1,2022)$ μπορεί να ανήκει στην (C) .

(Μονάδες 13)

21649 ΘΕΜΑ 2

Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της C .

(Μονάδες 10)

β) τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της C .

(Μονάδες 8)

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(5, \frac{9}{4})$.

(Μονάδες 7)

21651 ΘΕΜΑ 2

Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της C .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(5, \frac{9}{4})$.

(Μονάδες 7)

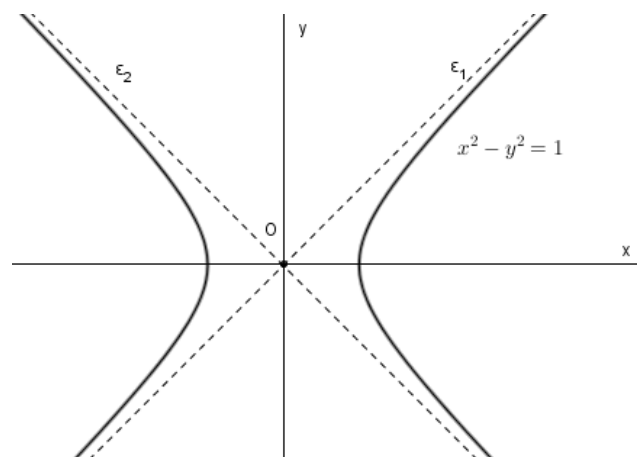
22051 ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$. Να αποδείξετε για τις ασύμπτωτες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 της υπερβολής ότι:

α) Συμπίπτουν με την διχοτόμο του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου και την διχοτόμο του 2^{ου} και 4^{ου} τεταρτημορίου, αντίστοιχα. (Μονάδες 13)

β) Είναι ευθείες κάθετες μεταξύ τους.

(Μονάδες 12)



22169 ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με ασύμπτωτη την $y = \frac{3}{4}x$. Η απόσταση των κορυφών της A και A' είναι 8.

α)

i. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής. (Μονάδες 10)

ii. Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής; (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ στο σημείο της $(5, \frac{9}{4})$. (Μονάδες 10)

22196 ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση $x^2 - y^2 = 25$ (1)

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E'. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (ϵ_1) , (ϵ_2) της υπερβολής. (Μονάδες 10)

γ) Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες (ϵ_1) , (ϵ_2) ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 05)

22269 ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας :

i. Τις συντεταγμένες των εστιών της.

ii. Την εκκεντρότητά της.

iii. Τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της $A(\sqrt{5}, \frac{1}{2})$.

(Μονάδες 10)

22559 ΘΕΜΑ 2

Η υπερβολή στο παρακάτω σχήμα έχει εστίες τα σημεία $E'(-10, 0)$ και $E(10, 0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-8, 0)$ και $A(8, 0)$.

α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

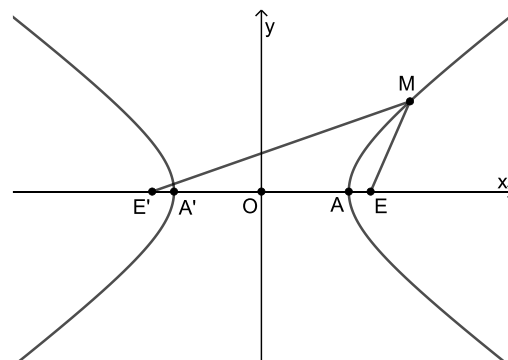
(Μονάδες 12)

β) Έστω M ένα σημείο της υπερβολής.

i. Να αποδείξετε ότι $|(ME') - (ME)| = 16$.

(Μονάδες 8)

ii. Αν $(ME) = 9$, να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την εστία E'. (Μονάδες 5)

**22561 ΘΕΜΑ 2**

Στο παρακάτω σχήμα η υπερβολή C έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = 9$, οι ευθείες δ_1 και δ_2 είναι οι ασύμπτωτες της C και η ϵ είναι η εφαπτομένη της C στο σημείο της $M(5, 4)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

iii. Οι εξισώσεις των ασυμπτώτων είναι $\delta_1: y = x$ και $\delta_2: y = -x$.

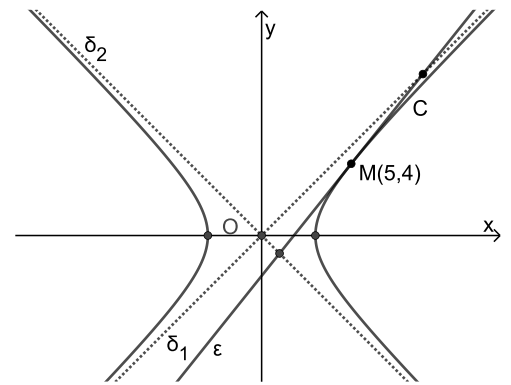
(Μονάδες 8)

iv. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι $\varepsilon: 5x - 4y = 9$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_1 καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_2 .

(Μονάδες 9)



22566 ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $4x^2 - y^2 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι $A(1,0)$ και $A'(-1,0)$

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = 2x$ και $y = -2x$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή A και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = -2x$ έχει εξίσωση $y = -2x + 2$

(Μονάδες 8)

22567 ΘΕΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy η υπερβολή $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-4, 0)$

και $A(4, 0)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευ-

θειές $y = \frac{3}{4}x$ και $y = -\frac{3}{4}x$.

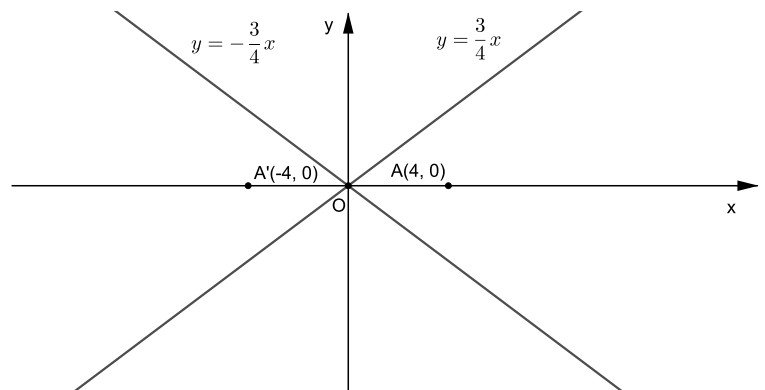
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha = 4$ και $\beta = 3$, (Μονάδες 10)

ii. οι εστίες της C είναι τα σημεία

$E'(-5, 0)$ και $E(5, 0)$.

(Μονάδες 10)



β) Να σχεδιάσετε το παραπάνω σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την παραπάνω υπερβολή C .

(Μονάδες 5)

17944 ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση της μορφής $(C): \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, εστιακή απόσταση $EE' = 2\sqrt{7}$ και εκ-

κεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2, \beta = \sqrt{3}$.

(Μονάδες 8)

β) i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών A, A' της υπερβολής (C) .

(Μονάδες 4)

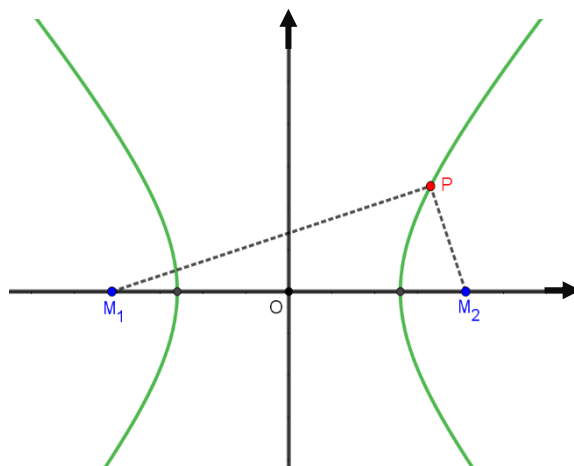
ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής (C) .

(Μονάδες 4)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την υπερβολή (C), τις ασύμπτωτές της, τις εστίες της και τις κορυφές της. (Μονάδες 9)

20653 ΘΕΜΑ 4

Κατά τη διάρκεια μιας επιχείρησης εντοπισμού ενός αγνοούμενου σε μια αχανή δασώδη επίπεδη περιοχή, δύο παρατηρητές M_1 και M_2 βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία. Ο αγνοούμενος εκτοξεύει φωτοβολίδες που διαθέτει και οι δύο παρατηρητές σημειώνουν τις χρονικές στιγμές που ακούνε τον ήχο της εκπυρσοκρότησης του όπλου. Είναι γνωστό ότι ο παρατηρητής M_1 ακούει σε όλες τις εκρήξεις τον ήχο με διαφορά 4 sec αργότερα από τον παρατηρητή M_2 .



α) Αν ονομάσουμε P την θέση του αγνοούμενου, να αποδείξετε ότι

$$(PM_1) - (PM_2) = 1360 \text{ m. Θεωρούμε ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι } 340 \text{ m/sec.}$$

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η θέση P του αγνοούμενου ανήκει σε έναν κλάδο υπερβολής με εστίες τα σημεία M_1 και M_2 . (Μονάδες 8)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι η απόσταση (M_1M_2) είναι 1378 m, να αποδείξετε ότι αυτή η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{680^2} - \frac{y^2}{111^2} = 1$, θεωρώντας ως άξονα $x'x$ την ευθεία M_1M_2 και κέντρο της υπερβολής την αρχή των αξόνων. Δίνεται ότι $37^2 = 1369$. (Μονάδες 9)

21656 ΘΕΜΑ 4

Έστω υπερβολή C με κέντρο το $(0,0)$, εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και κορυφές τα σημεία $A(4,0), A'(-4,0)$.

α) Να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής C . (Μονάδες 3)

ii. την εξίσωση της υπερβολής C . (Μονάδες 3)

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα, την υπερβολή C , τις ασύμπτωτες της C και το ορθογώνιο βάσης της C . (Μονάδες 9)

γ) Αν M τυχαίο σημείο της C , να βρείτε την τιμή της παράστασης $(ME) - (ME')$. (Μονάδες 5)

δ) Αν $M(\sqrt{80}, 6)$ σημείο της C , να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{EME'}$.

(Μονάδες 5)

21657 ΘΕΜΑ 4

Έστω υπερβολή C με κέντρο το $(0,0)$, εστίες πάνω στον άξονα xx' της οποίας το ορθογώνιο βάσης είναι τετράγωνο.

α) Να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της C . (Μονάδες 6)

ii. την εκκεντρότητα της C . (Μονάδες 6)

β) Αν η υπερβολή διέρχεται από το σημείο $(2,0)$ και (ζ) τυχαία ευθεία παράλληλη σε κάποια εκ των ασυμπτωτων της C (που δεν ταυτίζεται με κάποια από αυτές),

i. να δείξετε ότι η (ζ) έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την C . (Μονάδες 8)

ii. είναι η ευθεία (ζ) εφαπτόμενη της C ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

22174 ΘΕΜΑ 4

Πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον ήλιο του. Στο καρτεσιανό επίπεδο ο ήλιος βρίσκεται στην εστία της έλλειψης $E(\gamma,0)$, ενώ η άλλη εστία είναι στο $E'(-\gamma,0)$. Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι 0,6 ενώ ο μεγάλος άξονας 10.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς. (Μονάδες 09)

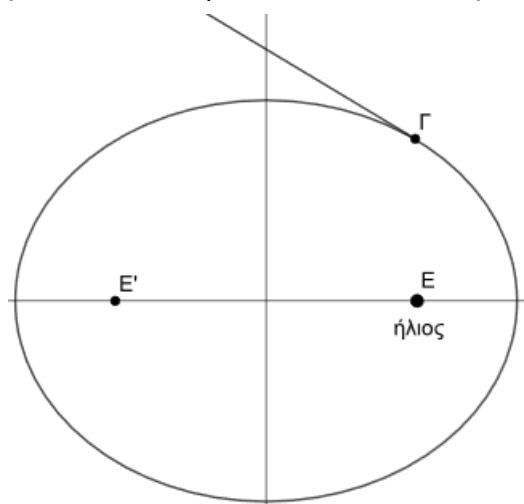
β) Θεωρούμε ότι ο πλανήτης κινείται πάνω στην $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

iii. Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο $\Gamma\left(3, \frac{16}{5}\right)$ εκπέμπεται από αυτόν σήμα που κινείται

κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς τη μεριά του άξονα Oy . Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα θα περάσει από το σημείο $\Delta(0,5)$. (Μονάδες 09)

iv. Κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ με $x > 0$.

Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των δύο τροχιών; (Μονάδες 07)



32206 ΘΕΜΑ 4

Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M\left(5, \frac{9}{4}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της C . (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{EME'}$. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ασύμπτωτές της. (Μονάδες 6)

Δίνεται ότι $\sqrt{1681} = 41$.

