# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

## *4ον ΥΠΕΡΒΟΛΗ*

**1)** Να ορίσετε για καθεμιά από τις παρακάτω υπερβολές, τις συν/νες της κορυφής τους, τις συν/νες των εστιών τους, την εκκεντρότητά τους και τις εξισώσεις των ασύμπτωτών τους:
- **i)** $4x^2-45y^2=180$,
- **ii)** $49y^2-16x^2=784$,
- **iii)** $x^2-y^2=25$,
- **iv)** $9x^2-64y^2=1$.

**2)** Να βρεθεί η εξίσωση καθεμιάς από τις παρακάτω υπερβολές:
- **i)** Άξονας (ΑΑ΄)=8, εστίες ($\pm5$,0),
- **ii)** Εστία (8,0) κορυφή (6,0),
- **iii)** διέρχεται από τα σημεία (3,1), (9,5),
- **iv)** διέρχεται από το σημείο (3,-5) και έχει ασύμπτωτες $2x\pm y=0$,
- **v)** κορυφή (6,0) και μια ασύμπτωτη $4x-3y=0$,
- **vi)** έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ και εφάπτεται της ευθείας (ε): $x-y+1=0$,
- **vii)** έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ και είναι ισοσκελής,
- **viii)** Έχει εστίες ($\pm3$,0) και εφάπτεται της ευθείας (ε): $2x-y-4=0$.

**3)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ και την ευθεία (ε): $9x+2y-24=0$.

**4)** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων (ε) της υπερβολής $25x^2-4y^2=100$ που είναι παράλληλες στην ευθεία (η): $3x-y=0$.

**5)** Να βρεθούν τα σημεία της υπερβολής $x^2-2y^2=8$ στα οποία η εφαπτόμενή της (ε) να είναι κάθετη στην ευθεία (η): $4x+5y=2$.

**6)** Φωτεινή ακτίνα ξεκινάει από την εστία Ε υπερβολικού κατόπτρου $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ που βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα Ox , σχηματίζει γωνία α με τον Ox, τέτοια ώστε $\pi<\alpha<3\pi/2$ και εφα=2 και ανακλάται επί του κατόπτρου. Να κατασκευάσετε το κάτοπτρο, την προσπίπτουσα ακτίνα, την ανακλώμενη ακτίνα και να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς της επί της υπερβολής ανακλώμενης ακτίνας.

**7)** Να δείξετε ότι η εφαπτόμενη της υπερβολής $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ που έχει συντελεστή δ/νσης m, έχει εξίσωση $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-\beta^2}$ .

**8)** Να δείξετε ότι το μεταξύ των ασύμπτωτων τμήμα της εφαπτομένης μιας υπερβολής διχοτομείται από το σημείο επαφής.

**9)** Να βρεθεί η γωνία των ασύμπτωτων μιας υπερβολής με εκκεντρότητα ε=2.

**10)** Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες της έλλειψης $9x^2+16y^2=144$ και της υπερβολής $x^2-64y^2=64$.

**11)** Να δείξετε ότι κάθε εστία της υπερβολής $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ απέχει από τις ασύμπτωτους απόσταση ίση με β.

**12)** Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και οι ευθείες $\delta: x=\frac{\alpha^2}{\gamma}$, $\delta': x=-\frac{\alpha^2}{\gamma}$. Έστω M(x, y) τυχαίο σημείο της έλλειψης.
- **a)** Να δείξετε ότι ο λόγος των αποστάσεων του σημείου M από την ευθεία δ και από την εστία Ε(γ,0) είναι ίσος με την εκκεντρότητα ε,
- **b)** Να δείξετε ότι ο λόγος των αποστάσεων του σημείου M από την ευθεία δ΄ και από την εστία Ε΄(-γ,0) είναι ίσος με την εκκεντρότητα ε.
- **c)** $|\vec{EM}|=\frac{\rho}{1-\varepsilon\sigma\upsilon\nu\phi}$ και $|\vec{E'M}|=\frac{\rho}{1+\varepsilon\sigma\upsilon\nu\theta}$ όπου $\rho=\beta^2/\alpha$ και φ,θ οι γωνίες που σχηματίζουν οι ΕΜ και Ε΄Μ αντίστοιχα με τον ημιάξονα Ox.

**13)** Δίνεται η υπερβολή $9x^2-16y^2=144$. Να βρείτε τα σημεία της υπερβολής για τα οποία ΑΕ$\perp$ΑΕ΄, όπου Ε, Ε΄ οι εστίες της.

**14)** Αν Α τυχαίο σημείο ισοσκελούς υπερβολής με εστίες Ε και Ε΄, να δείξετε ότι $(OA)^2=(AE)\cdot(AE')$.

**15)** Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=\alpha^2$ και η ισοσκελής υπερβολή $x^2-y^2=\alpha^2$. Από τυχαίο σημείο Μ του κύκλου φέρνουμε την εφαπτομένη του που τέμνει τον άξονα x΄Ox στο Ν. Να δείξετε ότι το μήκος του ευθ.

τμήματος ΜΝ είναι ίσο με την τεταγμένη ενός από τα σημεία της υπερβολής που έχει τετμημένη ίση με (ΟΝ).

**16)** Έστω $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ είναι συζυγείς υπερβολές με εκκεντρότητες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2=\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2$.

**17)** Έστω φ η θετική ρίζα της εξίσωσης $t^2-t-1=0$ και η υπερβολή $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\frac{a}{\beta}=\sqrt{\phi}$. Να δείξετε ότι $\varepsilon=\sqrt{\phi}$.

**18)** Αν η εφαπτομένη (ε) υπερβολής σε τυχαίο της σημείο $M\notin x x'$ και η κάθετη στην (ε) στο σημείο Μ τέμνουν τον άξονα y΄Oy στα Α και Β, να δείξετε ότι ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ διέρχεται από τις εστίες της υπερβολής.

**19)** **Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Τυχαία ευθεία (ε) τέμνει την υπερβολή στα σημεία $M_1(x_1,y_1)$ και $M_2(x_2,y_2)$ και τις ασύμπτωτές της στα σημεία Β και Γ. Να δείξετε ότι τα τμήματα της (ε) που είναι μεταξύ των ασύμπτωτων και της υπερβολής είναι ίσα.

**20)** Δίνεται η υπερβολή $x^2-2y^2=4$ και η ευθεία (ε): $3x+4y-1=0$. Αφού διαπιστώσετε ότι δεν τέμνονται, να βρείτε το σημείο της υπερβολής που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την (ε).

**21)** **Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα κοινά σημεία μιας έλλειψης και μιας υπερβολής που έχουν κοινές εστίες, είναι κάθετες.

**22)** **i)** Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων $M\left(\frac{3}{\sigma\upsilon\nu\theta},4\varepsilon\phi\theta\right)$, αν $\theta\in(-\pi,\pi)$ με $\theta\neq\pi/2$,

**ii)** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του παραπάνω γ.τ. που διέρχονται από το σημείο P(1,4),

**iii)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του παραπάνω γ.τ. που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε): $5x-3y+3=0$.

**23)** Να βρείτε τον γ.τ. των σημείων $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right),\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\right)$, όταν το λ μεταβάλλεται στο $R^*$.

**24)** Δίνεται η ευθεία (ε): $4y-9=0$ και το σημείο Ε(0,4). Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων M(x,y) του επιπέδου για τα οποία η απόστασή τους από το Ε είναι ίση με τα 4/3 της απόστασής τους από την (ε).

**25)** Δίνεται η ευθεία (ε): $3y-8=0$ και το σημείο Ε(0,6). Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων M(x,y) του επιπέδου για τα οποία η απόστασή τους από το Ε είναι ίση με τα 3/2 της απόστασής τους από την (ε).

**26)** **i)** Να δείξετε ότι τα σημεία M(x,y) με $x=a\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$ και $y=\beta\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$ όπου α, β, σταθεροί θετικοί πραγματικοί, όταν το θ μεταβάλλεται, ανήκει στην υπερβολή $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$,

**ii)** αν M(x,y), x>0 ,y>0 τυχαίο σημείο της υπερβολής $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$, να δείξετε ότι υπάρχει $\theta\in R$, τέτοιο ώστε $x=a\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$ και $y=\beta\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$.

Δίνεται ο Νεπέρειος αριθμός $e\approx 2,71$.

**27)** Στο ίδιο σύστημα αξόνων θεωρούμε τις γραφικές παραστάσεις της έλλειψης $\frac{x^2}{\phi^2}+y^2=1$ και της υπερβολής $\frac{x^2}{\phi}-y^2=1$, όπου φ η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2=x+1$. Να δείξετε ότι:

**a)** Η υπερβολή έχει ασύμπτωτες $y=\pm\frac{1}{\sqrt{\phi}}x$,

**b)** οι ασύμπτωτες τέμνουν την έλλειψη στα σημεία Γ΄(1,1/$\sqrt{\phi}$), Γ΄΄(1,-1/$\sqrt{\phi}$), Θ΄(-1,1/$\sqrt{\phi}$), Θ΄΄(-1,-1/$\sqrt{\phi}$) και οι ευθείες Γ΄Γ΄΄, Θ΄Θ΄΄ τον άξονα x΄Οx στα σημεία Γ(1,0) και Θ(-1,0) αντίστοιχα,

**c)** οι ΓΓ΄, ΘΘ΄ είναι οι διευθετούσες της υπερβολής,

**d)** οι κορυφές Δ και Ι της υπερβολής είναι οι εστίες της έλλειψης,

**e)** οι κορυφές Α και Κ της έλλειψης είναι οι εστίες της υπερβολής,

**f)** από το Δ φέρνουμε κάθετη στον άξονα x΄Ox που τέμνει την έλλειψη στα Δ΄, Λ΄ και τις ασύμπτωτες της υπερβολής στα Δ΄΄ και Λ΄΄. Αν η εφαπτομένη της έλλειψης από το Δ΄ τέμνει τον άξονα x΄Ox στο Ε και τον άξονα y΄Oy στο Ζ, να δείξετε ότι η διευθετούσα της έλλειψης διέρχεται από το Ε

**g)** να δείξετε ότι οι τετμημένες των Γ, Δ, Α και Ε σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο με λόγο λ= $\sqrt{\phi}$ ,

**h)** το ΟΑ διαιρείται από το Γ σε χρυσό λόγο,

**i)** το ΟΕ διαιρείται από το Δ σε χρυσό λόγο,

**j)** $\left|\overrightarrow{\Gamma\Gamma'}\right| = \sqrt{-\phi'}$ , $\left|\overrightarrow{\Delta\Delta'}\right| = -\phi'$ και $\left|\overrightarrow{\Delta\Delta''}\right| = 1$, όπου φ΄ η άλλη ρίζα της εξίσωσης $x^2=x+1$,

**k)** αν οι κάθετες από τα Α και Ε στον άξονα x΄Ox τέμνουν τα τμήματα της υπερβολής και της ασύμπτωτής της που είναι πάνω από τον άξονα x΄Ox στα Α΄, Α΄΄ και Ε΄, Ε΄΄ αντίστοιχα, τότε (ΑΑ΄)=(ΓΓ΄) και (ΑΑ΄΄)=(ΕΕ΄΄),

**l)** το Γ΄ είναι κοινό σημείο της έλλειψης, της διευθετούσας και της ασύμπτωτου της υπερβολής,

**m)** τα τμήματα ΔΔ΄΄, ΑΑ΄΄ διαιρούνται από τα Δ΄ και Α΄ αντίστοιχα σε χρυσό λόγο,

**n)** κάθε ευθεία που διέρχεται από το Ο και τέμνει την ΕΕ΄, διαιρείται από την ΔΔ΄ σε χρυσό λόγο,

**o)** το Δ΄ διαιρεί το ΕΖ σε χρυσό λόγο,

**p)** η εφαπτομένη της υπερβολής στο Α΄ διέρχεται από το Γ και

**q)** τα σημεία Ο, Δ΄, Α΄ είναι συνευθειακά.

**28)** Να δείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων τυχαίου σημείου της υπερβολής $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ από τις ασύμπτωτές της είναι σταθερό και ίσο με $(\alpha\beta/\gamma)^2$.

**29)** Η εφαπτομένη σε τυχόν σημείο Σ της υπερβολής $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ τέμνει την μια από τις ασύμπτωτές της στο Α. Αν Μ και Ν είναι οι προβολές του Α στους άξονες, να δείξετε ότι η ευθεία ΜΝ διέρχεται από το Σ.

**30)** Έστω M(x,y) τυχαίο σημείο. Ορίζουμε ρ=(ΟΜ) και θ τη γωνία που σχηματίζει η ΟΜ με τον ημιάξονα Οx. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\rho^2$συν2θ$=\alpha^2$ με α>0 παριστάνει ισοσκελή υπερβολή.

**31)** Δίνονται οι ευθείες ($\varepsilon_1$): y=κx και ($\varepsilon_2$): y=-κx. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων M(x,y) του επιπέδου για τα οποία το γινόμενο των αποστάσεών τους από τις ($\varepsilon_1$) και ($\varepsilon_2$) να ισούται με $\frac{\kappa^2\lambda^2}{1+\kappa^2}$, όπου κ, λ σταθεροί θετικοί πραγματικοί διάφοροι του μηδενός.

**32)** Δίνονται οι ευθείες ($\varepsilon_1$): y=κx και ($\varepsilon_2$): y=-κx. Από τυχαίο σημείο M(x,y) του επιπέδου φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην ($\varepsilon_2$) που τέμνει την ($\varepsilon_1$) στο Α. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων M(x,y) του επιπέδου για τα οποία 4(ΟΑΜ)=$\kappa c^2$, όπου κ, c σταθεροί θετικοί πραγματικοί διάφοροι του μηδενός.