ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΗ ΜΝΗΜΗ ΒΑΣΙΛΗ ΞΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ ΜΑΡΤΙΟΣ 2008

ΤΑΞΗ Γ΄ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

1. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει :
   $f^2(\chi)e^{\chi}>f'(\chi)$ για κάθε $\chi \in R$, $f(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in R$ και $f(0)=-1$.
   Να αποδείξετε ότι :
   I. Ισχύει $f(\chi)+e^{-\chi}<0$ για κάθε $\chi>0$.
   II. Υπάρχει $\xi>0$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)+f(\xi)<0$.

2. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f(\chi)>1$ για κάθε $\chi \in R^*$ και $f(0)=1$. Αν ισχύει $e^{\sqrt{f(x)}}-\ln\sqrt{f(x)} \geq e$ για κάθε $\chi \in R$, τότε:
   I. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $\chi_o=0$.
   II. Αν $g(\chi)= e^{\sqrt{f(x)}}-\ln\sqrt{f(x)}$, να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας για κάθε $\chi \in R$.
   III. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και $\alpha < \beta$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε:
   $$g'(x_0) > \frac{1}{2(\beta-\alpha)}\ln\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$$

ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 1

I-) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f^2(x)e^x > f'(x) \Leftrightarrow e^x > \frac{f'(x)}{f^2(x)}$$ αφού $f^2(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ γιατί $f(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow e^x - \frac{f'(x)}{f^2(x)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(e^x + \frac{1}{f(x)}\right)' > 0 \quad (1)$$

Επειδή $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ορίζεται στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση

$g(x) = e^x + \frac{1}{f(x)}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = \left(e^x + \frac{1}{f(x)}\right)'$

Λόγω της (1) είναι $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα

Άρα για κάθε $x > 0$ έχουμε $g(x) > g(0)$

$\Leftrightarrow g(x) > 0$ αφού $g(0) = e^0 + \frac{1}{f(0)} = 1 - 1 = 0$ (γιατί $f(0) = -1$)

$\Leftrightarrow e^x + \frac{1}{f(x)} > 0 \quad (2)$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη) και ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο και αφού επιπλέον $f(0) = -1 < 0$ είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα λόγω της (2), για κάθε $x > 0$ είναι $e^x f(x) + 1 < 0$

$\Leftrightarrow f(x) + \frac{1}{e^x} < 0$ γιατί $e^x > 0, x \in \mathbb{R}$

Επομένως $f(x) + e^{-x} < 0$ για κάθε $x > 0$

II-) Για κάθε $x > 0$ ορίζεται η συνάρτηση $h(t) = e^t f(t)$ στο διάστημα $[0, x]$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, x]$ για κάθε $x > 0$, με $h'(t) = e^t f(t) + e^t f'(t)$

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ υπάρχει (ένα τουλάχιστο) $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$h'(\xi) = \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \Leftrightarrow e^\xi f(\xi) + e^\xi f'(\xi) = \frac{e^x f(x) + 1}{x}$ (3) αφού $h(0) = e^0 f(0) = 1 \cdot (-1) = -1$

Από το ερώτημα (I) για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) + e^{-x} < 0 \Leftrightarrow f(x) + \frac{1}{e^x} < 0 \Leftrightarrow e^x f(x) + 1 < 0$

Άρα $\frac{e^x f(x) + 1}{x} < 0$ για κάθε $x > 0$

Επομένως, λόγω της (3), υπάρχει $\xi \in (0, x)$ δηλαδή $\xi > 0$ τέτοιο ώστε

$e^\xi f(\xi) + e^\xi f'(\xi) < 0 \Leftrightarrow f(\xi) + f'(\xi) < 0$

ΤΑΞΗ Γ'

ΘΕΜΑ 2

Επειδή $f(x)>1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ και $f(0)=1>0$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση

$h(x)=e^{\sqrt{f(x)}}-\ln\sqrt{f(x)}$

Είναι, $h(0)=e^{\sqrt{f(0)}}-\ln\sqrt{f(0)} = e^1-\ln 1=e$ (γιατί $f(0)=1$)

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x)=e^{\sqrt{f(x)}}\cdot(\sqrt{f(x)})'-\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\cdot(\sqrt{f(x)})'=(\sqrt{f(x)})'\left(e^{\sqrt{f(x)}}-\frac{\quad}{\sqrt{f(x)}}\right)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\cdot\frac{e^{\sqrt{f(x)}}\sqrt{f(x)}-1}{\sqrt{f(x)}}$$

$$\frac{f'(x)}{2f(x)}\left(e^{\sqrt{f(x)}}\cdot\sqrt{f(x)}-1\right)$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $e^{\sqrt{f(x)}}-\ln\sqrt{f(x)}\geq e$

Άρα $h(x)\geq h(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Επομένως η h παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0=0$ και επειδή είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, σύμφωνα με το Θ. Fermat ισχύει

$h'(0)=0 \Leftrightarrow \frac{f'(0)}{2f(0)}\left(e^{\sqrt{f(0)}}\cdot\sqrt{f(0)}-1\right)=0 \Leftrightarrow \frac{f'(0)}{2\cdot 1}\left(e^1\cdot 1-1\right)=0$ αφού $f(0)=1$

$\Leftrightarrow f'(0)\cdot\frac{e-1}{2}=0 \Leftrightarrow f'(0)=0$ αφού $\frac{e-1}{2}\neq 0$

I-) Η εφαπτόμενη (ε) της C_f στο $x_0=0$ έχει εξίσωση

(ε): $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$y-1=0(x-0)$ δηλαδή (ε): $y=1$

II-) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=h'(x)=f'(x)\cdot\frac{e^{\sqrt{f(x)}}\cdot\sqrt{f(x)}-1}{\quad}$ (1)

Για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει $f(x)>1 \Leftrightarrow \sqrt{f(x)}>1$ (2)

$\Leftrightarrow e^{\sqrt{f(x)}}>e$ Άρα και $e^{\sqrt{f(x)}}>1$ (3) για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Απ' τις (2) και (3), για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει $e^{\sqrt{f(x)}}\sqrt{f(x)}>1 \Leftrightarrow e^{\sqrt{f(x)}}\sqrt{f(x)}-1>0$

Άρα $\frac{e^{\sqrt{f(x)}}\cdot\sqrt{f(x)}-1}{2f(x)}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$

Επομένως, λόγω της (1) οι συναρτήσεις g' και f' είναι ομόσημες για κάθε $x\in$

- Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, τότε και $g'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$
  Άρα οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε καθένα απ' τα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[0,+\infty)$ και επειδή οι f, g είναι συνεχείς στο 0, συμπεραίνουμε ότι οι f, g είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$.
- Αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, τότε και $g'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$
  Όμοια συμπεραίνουμε ότι οι f, g είναι γνησίως φθίνουσες στο $\mathbb{R}$.

III-) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[a,\beta]$ και άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$g'(x_0) = \frac{g(\beta)-g(a)}{\beta-a}$$

$$\Leftrightarrow g'(x_0) = \frac{e^{\sqrt{f(\beta)}} - \ln\sqrt{f(\beta)} - e^{\sqrt{f(a)}} + \ln\sqrt{f(a)}}{\beta-a} \Leftrightarrow g'(x_0) = \frac{e^{\sqrt{f(\beta)}} - e^{\sqrt{f(a)}}}{\beta-a} + \frac{\ln\sqrt{f(a)} - \ln\sqrt{f(\beta)}}{\beta-a}$$

$$\Leftrightarrow g'(x_0) = \frac{e^{\sqrt{f(\beta)}} - e^{\sqrt{f(a)}}}{\beta-a} + \frac{\ln\frac{\sqrt{f(a)}}{\sqrt{f(\beta)}}}{\beta-a} \Leftrightarrow g'(x_0) = \frac{e^{\sqrt{f(\beta)}} - e^{\sqrt{f(a)}}}{\beta-a} + \frac{\ln\sqrt{\frac{f(a)}{f(\beta)}}}{\beta-a}$$

$$\Leftrightarrow g'(x_0) = \frac{e^{\sqrt{f(\beta)}} - e^{\sqrt{f(a)}}}{\beta-a} + \frac{\frac{1}{2}\ln\frac{f(a)}{f(\beta)}}{\beta-a} \Leftrightarrow g'(x_0) = \frac{e^{\sqrt{f(\beta)}} - e^{\sqrt{f(a)}}}{\beta-a} + \frac{1}{2(\beta-a)}\ln\frac{f(a)}{f(\beta)} \quad (4)$$

Επειδή $a<\beta$ και η f είναι γνησίως αύξουσα

είναι $f(a) < f(\beta) \Leftrightarrow \sqrt{f(a)} < \sqrt{f(\beta)}$ (είναι $f(a) \geq 1 > 0$, $f(\beta) \geq 1 > 0$)

$\Leftrightarrow e^{\sqrt{f(a)}} < e^{\sqrt{f(\beta)}}$ (αφού η εκθετική συνάρτηση με βάση e είναι 1)

$\Leftrightarrow e^{\sqrt{f(a)}} - e^{\sqrt{f(\beta)}} < 0 \Leftrightarrow e^{\sqrt{f(\beta)}} - e^{\sqrt{f(a)}} > 0$

Άρα $\dfrac{e^{\sqrt{f(\beta)}} - e^{\sqrt{f(a)}}}{\beta-a} > 0$

Επομένως λόγω της (4) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) > \dfrac{1}{2(\beta-a)}\ln\dfrac{f(a)}{f(\beta)}$