ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΗ ΜΝΗΜΗ ΒΑΣΙΛΗ ΞΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ ΜΑΡΤΙΟΣ 2009

ΤΑΞΗ Β΄ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

1. Δίνονται τα μη μηδενικά πολυώνυμα Α(χ) , Β(χ) . Θεωρούμε τα πολυώνυμα

   $P(\chi)= \chi^{2009} A(\chi) + \chi^{2008} B(\chi) + 1$ και

   $Q(\chi)= \chi^{2009} B(\chi) + \chi^{2008} A(\chi) + 1$

Αν ο ρ με $|\rho|<1$ είναι κοινή ρίζα των Ρ(χ) και Q(χ), δείξτε ότι :

i. $\rho \neq 0$
ii. $A(\rho) \neq 0$ και $B(\rho) \neq 0$
iii. $|A(\rho)|=|B(\rho)|>\frac{1}{2}$

1. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ . Έστω Δ τυχαίο εσωτερικό σημείο ώστε ΔΒ=3 , ΔΑ=4 και ΔΓ=5. Κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΒΕΔ (το Ε ανήκει στο ημιεπίπεδο που ορίζουν η ευθεία ΒΔ και το σημείο Α).
   i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΒΔΓ είναι ισεμβαδικά .
   ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ .

ΤΑΞΗ Β΄ **ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

1.

i. Αν ρ=0 τότε P(0)=0, άτοπο γιατί P(0)=1, άρα $\rho \neq 0$.

ii. $P(\rho)=0 \Leftrightarrow \rho^{2009}A(\rho) + \rho^{2008}B(\rho) + 1=0$ (1)

Q$(\rho)=0 \Leftrightarrow \rho^{2009}B(\rho) + \rho^{2008}A(\rho) + 1=0$

Άρα: $\rho^{2009}A(\rho) + \rho^{2008}B(\rho) = \rho^{2009}B(\rho) + \rho^{2008}A(\rho)$

$\Leftrightarrow \rho^{2008}A(\rho)(\rho-1)= \rho^{2008}B(\rho)(\rho-1)$

$\Leftrightarrow A(\rho)= B(\rho)$ ($\rho \neq 0$ από (i), και $\rho \neq 1$ επειδή $|\rho|<1$)

Αν $A(\rho)=0$ τότε και $B(\rho)=0$ οπότε στην (1):

$P(\rho)=0 \Leftrightarrow \rho^{2009}A(\rho) + \rho^{2008}B(\rho) + 1=0 \Leftrightarrow 1=0$ άτοπο, άρα $A(\rho) \neq 0$ και $B(\rho) \neq 0$.

iii. $P(\rho)=0 \Leftrightarrow \rho^{2009}A(\rho) + \rho^{2008}B(\rho) + 1=0 (A(\rho)= B(\rho))$

$\Leftrightarrow \rho^{2009}A(\rho) + \rho^{2008}A(\rho) + 1=0$

$\Leftrightarrow \rho^{2008}A(\rho)(\rho + 1)=-1$

Άρα $|\rho^{2008}A(\rho)(\rho + 1)|=|-1|=1$ (2)

Όμως $|\rho^{2008}A(\rho)(\rho + 1)|=$

$|\rho|^{2008}|A(\rho)||\rho +1|<1^{2008}.|A(\rho)|.2$ ($|\rho|<1 \Leftrightarrow |\rho|^{2008}<1$
$|\rho+1| \leq |\rho|+1<2$)

Άρα από (2) : $1< 2|A(\rho)| \Leftrightarrow |A(\rho)| > \frac{1}{2}$

2.

i. Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΒΔΓ είναι ίσα. (ΒΕ=ΒΔ=3,ΒΑ=ΒΓ και $E\hat{B}A = \Delta\hat{B}\Gamma = 60^o - A\hat{B}\Delta$).Άρα (ΑΕΒ)=(ΒΔΓ)

ii. Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΒΔΓ είναι ίσα . Άρα ΑΕ=ΔΓ=5.
Επομένως το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ορθογώνιο (πλευρές 3,4 και 5).
Άρα $A\hat{\Delta}B=150^o$.Στο τρίγωνο ΑΒΔ νόμος συνημιτόνων:
$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 - 2A\Delta.B\Delta.\text{συν}150^o$

$=4^2+3^2+2.4.3.\frac{\sqrt{3}}{2}=25+12\sqrt{3}$

Άρα: $(AB\Gamma)=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(25+12\sqrt{3})\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}+36}{4}$ τ.μ.