ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΗ ΜΝΗΜΗ ΒΑΣΙΛΗ ΞΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ ΜΑΡΤΙΟΣ 2009

ΤΑΞΗ Γ΄ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

1. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα [2,4] και σύνολο τιμών το διάστημα [-2,2]. Έστω ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με f(2)=0 και f(4)=1. Επίσης δίνεται η συνάρτηση g με $g(\chi) = e^{f(\chi)} + \chi f(\chi)$ για κάθε $\chi \in [2,4]$.
   i. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\chi_1, \chi_2 \in (2,4)$ ώστε $g'(\chi_1)=-2$ και $g'(\chi_2)=2$.
   ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(\chi)e^{f(\chi)} + \chi f'(\chi) + f(\chi) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (2,4).
   iii. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2,4)$ ώστε
   $$g''(\xi) = (f'(\xi))^2 e^{f(\xi)} + 2f'(\xi).$$

2. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη και συνεχής στο R με $f(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in R$. Αν ισχύουν:
   f(2008)=1 , f(2009)=10 και
   $\dfrac{f(f(x))}{f(f(x)+2)} = \dfrac{f(f(x)+3)}{f(f(x)+1)}$ για κάθε $\chi \in R$, τότε:
   i. Δείξτε ότι f(2)f(3) = f(4)f(5).
   ii. Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in [2,3]$, τέτοιο ώστε $f^2(\rho) = f(2)f(3)$.
   iii. Δείξτε ότι η f δεν είναι «1-1».
   iv. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο [2008,2009] και $\chi_1, \chi_2 \in [2008,2009]$,δείξτε ότι υπάρχει ένα μοναδικό $\chi_o \in [2008,2009]$ τέτοιο ώστε $3f(\chi_o) = f(\chi_1) + 2f(\chi_2)$.

ΤΑΞΗ Γ΄ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

3.

i. Η f παραγωγίσιμη στο κλειστό [2,4], άρα και συνεχής σε αυτό. Επομένως (θ. μέγιστης- ελάχιστης τιμής), υπάρχουν $\chi_1, \chi_2 \in (2,4)$ ($\chi_1, \chi_2 \neq 2,4$), ώστε $f(\chi_1)=-2$ και $f(\chi_2)=2$. Δηλαδή χ_1, χ_2 θέσεις τοπικών ακροτάτων, οπότε (θ. Fermat) $f\,'(\chi_1)=0$ και $f\,'(\chi_2)=0$.

Για κάθε $\chi \in [2,4]$: $g\,'(\chi)= e^{f(\chi)}f\,'(\chi)+f(\chi) + \chi f\,'(\chi)$

Άρα $g\,'(\chi_1)= e^{f(\chi_1)}f\,'(\chi_1)+f(\chi_1) + \chi_1 f\,'(\chi_1)$
$=e^{-2}.0+(-2)+0=-2$

$g\,'(\chi_2)= e^{f(\chi_2)}f\,'(\chi_2)+f(\chi_2) + \chi_2 f\,'(\chi_2)$
$=e^{2}.0+2+0=2$

ii. Είναι $f\,'(\chi)e^{f(\chi)} + \chi f\,'(\chi)+ f(\chi) =0 \Leftrightarrow g\,'(\chi)=0$

Για την $g\,'$, θ. bolzano στο $[\chi_1, \chi_2]$:

1. Η $g\,'$ συνεχής στο $[\chi_1, \chi_2] \subseteq [2,4]$ ως παραγωγίσιμη σε αυτό.
(Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [2,4] ως πράξεις διπλά παραγωγισίμων συναρτήσεων στο [2,4] (1))
2. $g\,'(\chi_1)\, g\,'(\chi_2)=(-2)2=-4<0$

Άρα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(\chi_1, \chi_2) \subseteq (2,4)$ της εξίσωσης $g\,'(\chi)=0$.

iii. Από (1) και για κάθε $\chi \in [2,4]$ έχουμε:

$g\,''(\chi)= e^{f(\chi)}f\,'(\chi)\, f\,'(\chi)+e^{f(\chi)}f\,''(\chi) +f\,'(\chi) +f\,'(\chi) +\chi f\,''(\chi)$
$= e^{f(\chi)} (f\,'(\chi))^2 + (e^{f(\chi)} +\chi)f\,''(\chi)+2 f\,'(\chi)$ (2)

Για την $f\,'$, θ. Rolle στο $[\chi_1, \chi_2]$:

1. Η $f\,'$ παραγωγίσιμη στο $[\chi_1, \chi_2] \subseteq [2,4]$.
(Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [2,4])
2. $f\,'(\chi_1)= f\,'(\chi_2)=0$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\chi_1, \chi_2) \subseteq (2,4)$ έτσι ώστε:

$$f\,''(\xi)=0$$

Τότε από (2) έχουμε:

$g\,''(\xi)= e^{f(\xi)} (f\,'(\xi))^2 + (e^{f(\xi)} +\xi)f\,''(\xi)+2 f\,'(\xi)$
$= e^{f(\xi)} (f\,'(\xi))^2 + 0+2 f\,'(\xi)$
$= e^{f(\xi)} (f\,'(\xi))^2 +2 f\,'(\xi)$

2.

i. Είναι $f(\chi)>0$ για κάθε $\chi \in R$(σταθερό πρόσημο).

Άρα ,θ. ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $\lambda \in (2008,2009)$ τέτοιο ώστε $f(\lambda)=2 \in (1,10)$

Στην $\frac{f(f(x))}{f(f(x)+2)} = \frac{f(f(x)+3)}{f(f(x)+1)}$ για $\chi=\lambda$ έχουμε:

$$\frac{f(2)}{f(2+2)} = \frac{f(2+3)}{f(2+1)} \Leftrightarrow f(2)f(3) = f(4)f(5).$$

ii. Έστω $h(\chi)= f^2(\chi) - f(2)f(3)$, $\chi \in [2,3]$.

Για την h , θ. bolzano στο [2,3] :

3. Η h συνεχής στο $[2.3] \subseteq R$.(Η h είναι συνεχής στο R ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο R)
4. $h(2)= f^2(2) - f(2)f(3)= f(2)(f(2) - f(3))$
   $h(3)= f^2(3) - f(2)f(3) =f(3)(f(3) - f(2))$

Άρα $h(2)\, h(3)=- f(2)\, f(3)\, (f(2) - f(3))^2 \leq 0$ ($f(\chi)>0$ για κάθε $\chi \in R$)

a. Αν $f(2) \neq f(3)$ τότε $h(2)\, h(3)<0$, οπότε σύμφωνα με το θ. bolzano, υπάρχει ένα $\rho \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $h(\rho)=0$. (1)
b. Αν $f(2) =f(3)$ τότε $h(2)\, h(3)=0 \Leftrightarrow h(2)=0$ ή $h(3)=0$
   Δηλαδή $\rho=2$ ή $\rho=3$. (2)

Άρα από (1) και (2) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in [2,3]$, τέτοιο ώστε $h(\rho)=0 \Leftrightarrow f^2(\rho) = f(2)f(3)$.

iii. Είναι $f^2(\rho) = f(2)f(3)$, $\rho \in [2,3]$

Ομοίως $f^2(\kappa) = f(4)f(5)$, $\kappa \in [4,5]$

Άρα $f^2(\rho) = f^2(\kappa) \Leftrightarrow f(\rho) = f(\kappa)$ ($f(\chi)>0$ για κάθε $\chi \in R$)

Όμως $\rho \neq \kappa$ γιατί $[2,3] \cap [4,5]=\{\}$.

Άρα η f δεν είναι «1-1».

iv. Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο A= [2008,2009]

Άρα $f(A)=[f(2008),f(2009)]=[1,10]$

Όμως $\chi_1 , \chi_2 \in A$, άρα :

$$1 \leq f(\chi_1) \leq 10$$
$$1 \leq f(\chi_2) \leq 10$$

Επομένως $3 \leq f(\chi_1)+2 f(\chi_2) \leq 30 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{f(\chi_1)+2f(\chi_2)}{3} \leq 10$

Άρα $\frac{f(\chi_1)+2f(\chi_2)}{3} \in f(A)$ και επομένως υπάρχει

$\chi_o \in [2008,2009]$ τέτοιο ώστε

$f(\chi_o) = \frac{f(\chi_1)+2f(\chi_2)}{3} \Leftrightarrow 3 f(\chi_o) = f(\chi_1)+2f(\chi_2)$.

Το χ_o είναι μοναδικό γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα στο A.