Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου

Μαθηματικά : Τάξη: Α΄

Δράμα 28 Μαρτίου 2010

Θέμα 1°

Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου να αποδειχθεί ότι η εξίσωση: $$\alpha^2 x - \gamma^2(x+1) - \beta^2 x(x+1) = 0$$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

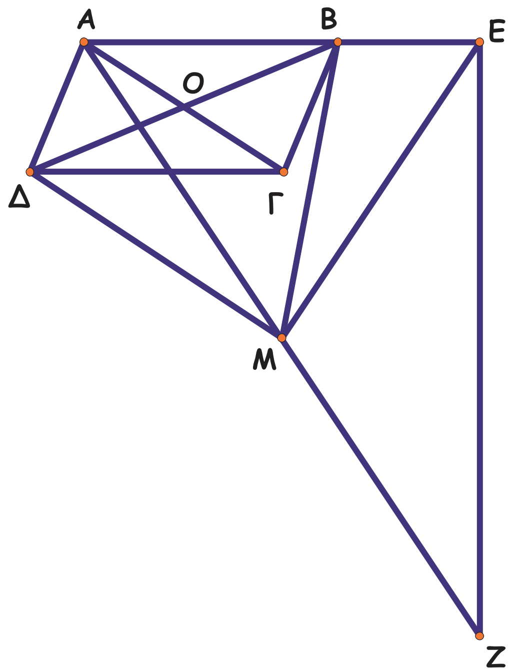
Θέμα 2°

Στο παρακάτω σχήμα, ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο στο οποίο προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΓ. Η κάθετη στην ΑΕ στο σημείο Ε τέμνει την διχοτόμο της γωνίας Α στο σημείο Ζ. Αν Ο είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου και Μ το μέσο της ΑΖ να δείξετε ότι:

α) Τρίγωνο ΜΒΕ = Τρίγωνο ΜΑΔ.

β) ΓΖ = 2 ΜΟ

γ) ΓΖ κάθετη ΔΒ



<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ</u> : Τάξη: Α΄

Δράμα 28 Μαρτίου 2010

<u>Θέμα 1ο</u>

Η εξίσωση μετά από επιμεριστικές και αναγωγή ομοίων όρων γίνεται:

$\beta^2 x^2 + (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)x + \gamma^2 = 0$, της οποίας η διακρίνουσα είναι:

$\Delta = (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)^2 - 4\beta^2\gamma^2 = (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 - 2\beta\gamma)(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 + 2\beta\gamma)$

$= [(\beta - \gamma)^2 - \alpha^2]\,[(\beta + \gamma)^2 - \alpha^2] = (\beta - \gamma - \alpha)(\beta - \gamma + \alpha)(\beta + \gamma - \alpha)(\beta + \gamma + \alpha) < 0$

γιατί: $\beta - \gamma - \alpha < 0$ επειδή $\beta < \gamma + \alpha$, (τριγωνική ανισότητα)

$\beta - \gamma + \alpha > 0$ επειδή $\beta + \alpha > \gamma$, (τριγωνική ανισότητα)

$\beta + \gamma - \alpha > 0$ επειδή $\beta + \gamma > \alpha$, (τριγωνική ανισότητα)

$\beta + \gamma + \alpha > 0$ επειδή α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου.

<u>Θέμα 2ο</u>

α) Τα τρίγωνα ΜΒΕ και ΜΑΔ είναι ίσα γιατί:

i) $\left.\begin{array}{l} \text{ΒΕ} = \text{ΒΓ} \quad (\text{Υπόθεση}) \\ \text{ΒΓ} = \text{ΑΔ} \quad (\text{Παρ/μο}) \end{array}\right\}$ Οπότε $\text{ΒΕ} = \text{ΑΔ}$

ii) ΜΕ = ΜΑ (Τρίγ. ΕΜΑ ισοσκελές,γιατί ΕΜ διάμεσος ορθογ. τριγώνου)

iii) $\left.\begin{array}{l} \text{Μ}\hat{\text{Ε}}\text{Β} = \text{Μ}\hat{\text{Α}}\text{Ε} \quad (\text{Τρίγωνο ΕΜΑ ισοσκελές}) \\ \text{Μ}\hat{\text{Α}}\text{Ε} = \text{Μ}\hat{\text{Α}}\text{Δ} \quad (\text{ΑΔ Διχοτόμος της } \hat{\text{Α}}) \end{array}\right\}$ Οπότε $\text{Μ}\hat{\text{Ε}}\text{Β} = \text{Μ}\hat{\text{Α}}\text{Δ}$

Άρα έχουμε (Π-Γ-Π)

β) Στο τρίγωνο ΑΓΖ, Μ και Ο είναι τα μέσα των πλευρών ΑΖ και ΑΓ.
Επομένως ΓΖ =// 2ΜΟ.

γ) Από τα ίσα τρίγωνα ΜΒΕ και ΜΑΔ, έχουμε ΜΒ = ΜΔ. Άρα ΜΟ διάμεσος προς την βάση ισοσκελούς τριγώνου θα είναι και ύψος. Δηλαδή ΜΟ κάθετη στην ΔΒ, οπότε και η παράλληλη της από το β) ερώτημα ΓΖ είναι κάθετη στην ΒΔ.