Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου

Μαθηματικά : Τάξη: Β΄

Δράμα 28 Μαρτίου 2010

<u>Θέμα 1ο</u>

Η διαίρεση πολυωνύμου f(x) με το $g(x) = x^2 + 1$ δίνει πηλίκο $\pi(x) = x + 1$ και υπόλοιπο $\upsilon(x) = \left(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha - \frac{1}{2}\right)x^2 + (\sigma\upsilon\nu 4\alpha)x + 1$

για κάποια γωνία α rad.

α) Να βρείτε το f(x)

β) i) Να βρείτε το f(α + 1), $\alpha \in R$.

ii) Για $x \neq 1$ να διασπάσετε το κλάσμα $\frac{f(x)}{(x-1)^4}$ σε άθροισμα κλασμάτων με σταθερό αριθμητή και παρονομαστή δύναμη του x-1.

<u>Θέμα 2ο</u>

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \psi^2 - 2\sqrt{\lambda}x + \mu^2 = 0$ (1) , $\lambda,\mu \in R$ με $\mu^2 < \frac{\lambda}{2}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\mu,\lambda \in R$.

β) **i)** Αν (C_1) κύκλος της εξίσωσης (1) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο και τέμνεται από την ευθεία (ε): ψ = x – 2 στα σημεία Α, Β έτσι ώστε $\vec{OA}\cdot\vec{OB} = 0$, τότε να βρείτε τα λ, μ.

ii) Έστω κύκλος C_2: $x^2 + \psi^2 = 4$. Να βρείτε την γραμμή στην οποία κινείται σημείο Μ του επιπέδου, από το οποίο το εφαπτόμενο τμήμα προς τον (C_1) έχει διπλάσιο μήκος από το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που φέρεται από το σημείο Μ προς τον κύκλο C_2.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ : Τάξη: Β΄

Δράμα 28 Μαρτίου 2010

Θέμα 1ο

α) Ο διαιρέτης δ(χ) = $χ^2 + 1$ είναι δευτέρου βαθμού, άρα το υπόλοιπο υ(χ) είναι το πολύ πρώτου βαθμού ή το μηδενικό πολυώνυμο. Επομένως

ημα + συνα - $\frac{1}{2}$ = 0 $\Leftrightarrow$ ημα + συνα = $\frac{1}{2}$ άρα

$ημ^2α + συν^2α + 2ημασυνα = \frac{1}{4} \Leftrightarrow ημ2α = -\frac{3}{4}$

Επίσης $συν4α = 1 – 2ημ^2 2α = 1 – 2\cdot\frac{9}{16} = -\frac{1}{8}$. Άρα $υ(χ) = -\frac{1}{8}x + 1$

Οπότε από την ταυτότητα της ευκλείδιας διαίρεσης έχουμε

$f(x) = (χ^2 + 1)(χ + 1) -\frac{1}{8}x + 1 \Leftrightarrow f(x) = χ^3 + χ^2 + \frac{7}{8}x + 2$

β) **i)** **Θέτουμε χ = α + 1** $\Leftrightarrow$ **χ – 1 = α** οπότε το f(x) γίνεται:

$f(α + 1) = (α + 1)^3 + (α + 1)^2 + \frac{7}{8}(α + 1) + 2$

$\Leftrightarrow f(α + 1) = α^3 + 3α^2 + 3α + 1 + α^2 + 2α + 1 + \frac{7}{8}α + \frac{7}{8} + 2$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{f(α + 1) = α^3 + 4α^2 + \frac{47}{8}α + \frac{39}{8}}$ (1)

ii) Επίσης η (1) χρησιμοποιώντας τις αντικαταστάσεις του **i)** ερωτήματος γίνεται

$f(x) = (χ - 1)^3 + 4(χ - 1)^2 + \frac{47}{8}(χ - 1) + \frac{39}{8}$

για $χ \neq 1$ διαιρώ με $(χ-1)^4$ και προκύπτει :

$$\frac{f(x)}{(x-1)^4} = \frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{\frac{47}{8}}{(x-1)^3} + \frac{\frac{39}{8}}{(x-1)^4}$$

<u>Θέμα 2ο</u>

α) $Α^2 + Β^2 - 4Γ = 4λ - 4μ^2 = 4(λ - μ^2)$. Αλλά $λ > 2μ^2 \geq μ^2$ Άρα $λ > μ^2$
Δηλαδή $Α^2 + Β^2 - 4Γ > 0$ οπότε η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο
με κέντρο $Κ(\sqrt{\lambda},0)$ και ακτίνα $ρ = \frac{1}{2}\sqrt{4(\lambda-\mu^2)} = \sqrt{\lambda-\mu^2}$

β) **i)** Επειδή ο κύκλος (C_1) της εξίσωσης (1) διέρχεται από την αρχή των αξόνων $Ο(0,0)$, θέτουμε $χ = ψ = 0$, οπότε $μ^2 = 0 \Leftrightarrow$ **$μ = 0$**.

Επίσης $\vec{OA}\cdot\vec{OB} = 0$, άρα $\vec{OA} \perp \vec{OB}$, $A\hat{O}B = 90^O$. Επομένως ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου (C_1), οπότε η $ψ = χ - 2$ διέρχεται από το κέντρο $Κ(\sqrt{\lambda},0)$ του κύκλου (1). Με επαλήθευση του κέντρου $Κ(\sqrt{\lambda},0)$ έχουμε $0 = \sqrt{\lambda} - 2 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda} = 2 \Leftrightarrow$ **$λ = 4$**.
Επομένως **$(λ, μ) = (4, 0)$**.

ii) Έστω $Μ(χ, ψ)$ σημείο του επιπέδου από το οποίο το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ προς τον (C_1) έχει διπλάσιο μήκος, από το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΜΔ προς τον κύκλο
C_2: $χ^2 + ψ^2 = 4$.
Έχουμε $(ΜΓ) = 2(ΜΔ) \Leftrightarrow (ΜΓ)^2 = 4(ΜΔ)^2$
$\Leftrightarrow (ΜΚ)^2 - 2^2 = 4[(ΜΟ)^2 - 2^2]$
$\Leftrightarrow (χ - 2)^2 + ψ^2 - 4 = 4(χ^2 + ψ^2 - 4)$
$\Leftrightarrow 3χ^2 + 3ψ^2 + 4χ - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\cdot\frac{2}{3}x + \frac{4}{9} + \psi^2 = \frac{16}{3} + \frac{4}{9}$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \psi^2 = \left(\frac{2\sqrt{13}}{3}\right)^2$$