# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΗ ΜΝΗΜΗ ΒΑΣΙΛΗ ΞΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ ΜΑΡΤΙΟΣ 2010

**ΤΑΞΗ Γ΄**
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

1. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει :

   $$f(2) < f'(x) < f(3) \text{ για κάθε } x \in R.$$

   i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

   ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα (1,2).

   iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια ώστε :

   $$\frac{f(3)}{f'(\xi_2)} - \frac{f(1)}{f'(\xi_1)} = 2$$

   iv. Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$, η συνεχής συνάρτηση $g : R \to R$ και η συνάρτηση $h(x)= f(x).g(x)$, $x \in R$.

   Έστω ότι ισχύει $h(x) \geq 1 + x f(x)$ για κάθε $x \in R$.

   i. Αν $g(2)=1$, δείξτε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,2).

   ii. Αν οι συναρτήσεις $f'$ και $g$ είναι άρτιες συναρτήσεις δείξτε ότι ισχύει

   $$h(x)+ h(-x)= 2f(0).g(x) \text{ για κάθε } x \in R.$$

ΤΑΞΗ Γ΄ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**1.**

3. Η f παραγωγίσιμη στο R ,άρα και συνεχής σε αυτό. Επομένως (Θ.Μ.Τ στο [2,3] για την f), υπάρχει $x_1 \in (2,3)$ ώστε $f'(x_1)=f(3)-f(2)$. Όμως $f(2) < f'(x) < f(3)$ (1) για κάθε $x \in R$. Άρα :

$f(2) < f(3)-f(2) < f(3)$ οπότε $f(3)-f(2) < f(3) \Leftrightarrow f(2)>0$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

4. Από Θ.Μ.Τ για την f στο [1,2], υπάρχει $x_2 \in (1,2)$ ώστε $f'(x_2)=f(2)-f(1)$. Λόγω (1) έχουμε :

$f(2) < f(2)-f(1) < f(3)$ οπότε $f(2)-f(1) > f(2) \Leftrightarrow f(1)<0$

Επομένως , από Θ. bolzano για την f στο [1,2], η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (1,2) η οποία είναι και μοναδική γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα στο R .

5. Έστω $x_o$ η ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$, δηλαδή $f(x_o)=0$. Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ για την f στα $[1, x_o]$και $[x_o ,3]$ οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (1, x_o)$ και $\xi_2 \in (x_o ,3)$ ώστε :

$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}=\frac{-f(1)}{x_0-1} \Leftrightarrow \frac{f(1)}{f'(\xi_1)}=1-x_0$ και

$f'(\xi_2)=\frac{f(3)-f(x_0)}{3-x_0}=\frac{f(3)}{3-x_0} \Leftrightarrow \frac{f(3)}{f'(\xi_2)}=3-x_0$

Επομένως $(3-x_o)-(1-x_o)=2$

6. Θεωρώ την συνάρτηση $g(x) = f(x)-xf(2)$ , $x \in R$

Είναι $g'(x) = f'(x)-f(2) > 0$ , $x \in R$

Άρα , η g είναι γνησίως αύξουσα στο R .

Οπότε για $x > 2$ είναι $g(x) > g(2) \Leftrightarrow f(x)-xf(2) > -f(2)$

$\Leftrightarrow f(x) > xf(2) - f(2)$

Όμως $\lim_{x\to+\infty}(xf(2) - f(2))= \lim_{x\to+\infty} xf(2) =+\infty$ (f(2)>0).

Άρα και $\lim_{x\to+\infty} f(x) =+\infty$ (;)

**2.**

**i.**

Είναι $g(2)=1>0$ , άρα αρκεί $g(0)<0$

(και μετά θ. bolzano για την $g$ στο $[0,2]$ )

Ισχύει $h(x)\geq 1+x\,f(x)$ και

$h(x)=f(x).g(x)$ , για κάθε $x\in R$.

Άρα $f(x).g(x)\geq 1+x\,f(x)$ (1) , για κάθε $x\in R$.

Η (1) για $x=0$ δίνει: $f(0).g(0)\geq 1+0.f(0)$

$\Leftrightarrow f(0).g(0)\geq 1$ (2)

Η (1) για $x=2$ δίνει: $f(2).g(2)\geq 1+2\,f(2)$

$\Leftrightarrow f(2)\leq -1$ ( γιατί $g(2)=1$ )

Έστω ότι υπάρχει $x_o\in R$ ώστε $f(x_o)=0$.

Η (1) για $x=x_o$ δίνει: $f(x_o).g(x_o)\geq 1+x_o\,f(x_o)\Leftrightarrow 0\geq 1$

άτοπο

Άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και επειδή η f συνεχής στο R διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R. Όμως $f(2)\leq -1<0$ , άρα : $f(x)<0$ για κάθε $x\in R$ ,οπότε και $f(0)<0$ .

Επομένως, λόγω (2), είναι $g(0)<0$.

**ii.** Για κάθε $x\in R$ είναι :

$h(x)+h(-x)=f(x).g(x)+f(-x).g(-x)$

$\Leftrightarrow h(x)+h(-x)=f(x).g(x)+f(-x).g(x)$ (η $g$ είναι άρτια)

$\Leftrightarrow h(x)+h(-x)=(f(x)+f(-x)).g(x)$ (3)

Θεωρώ την συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)+f(-x)$ , $x\in R$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο R με :

$\varphi'(x)=f'(x)-f'(-x)$

$=f'(x)-f'(x)=0$ ,για κάθε $x\in R$ (η $f'$ είναι άρτια).

Άρα η φ είναι σταθερή στο R με $\varphi(0)=f(0)+f(-0)=2f(0)$

Επομένως $\varphi(x)=2\,f(0)$ , για κάθε $x\in R$ .

Δηλαδή $f(x)+f(-x)=2\,f(0)$ , για κάθε $x\in R$.

Οπότε , από (3), είναι :

$h(x)+h(-x)=2\,f(0).g(x)$, για κάθε $x\in R$.