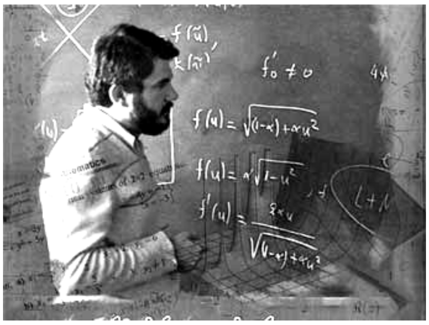
Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου



Μαθηματικά : Τάξη: Β΄

Δράμα 3 Απριλίου 2011

Θέμα 1ο

Δίνονται τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) ώστε η εξίσωση $P^2(x) + Q^2(x) = 0$ (1) να έχει δύο άνισες πραγματικές ακέραιες ρίζες.

Επίσης ισχύει
$$\begin{cases} e^{P(0)-4} + 3e^{Q(0)} = 4e \\ e^{P(0)-5} + e^{Q(0)-1} = 2 \end{cases}$$

i) Να βρεθούν οι ακέραιες ρίζες της εξίσωσης (1)

ii) Αν Π(χ) το πολυώνυμο που είναι το πηλίκο της διαίρεσης του P(χ) με το $(χ^2 - 1)$, να δείξετε ότι ο σταθερός όρος του, είναι αντίθετος του σταθερού όρου του P(χ)

iii) Αν το Q(χ) είναι περιττού βαθμού, βρείτε το άθροισμα των συντελεστών των άρτιων δυνάμεων του χ.

Θέμα 2ο

Δίνεται η εξίσωση $χ^2 + ψ^2 + (μ + 1)χ + (μ - 1)ψ + μ^2 + 3μ + 3 = 0$ (1) , $μ \in R$

i) Να βρεθούν οι τιμές του $μ \in R$ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο .

ii) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων.

iii) Να δείξετε ότι όλοι αυτοί οι κύκλοι βρίσκονται στην ταινία που ορίζεται από τις ευθείες (ε): χ – ψ – 1 = 0 και (δ): χ – ψ + 3 = 0

iv) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με την μέγιστη ακτίνα.

Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου

ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ : Τάξη: **Β΄**

Δράμα 3 Απριλίου 2011

Θέμα 1ο

i) Αρχικά για την λύση του δοθέντος συστήματος θέτω P(0) = α και Q(0) = β οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} e^{P(0)-4}+3e^{Q(0)}=4e \\ \\ e^{P(0)-5}+e^{Q(0)-1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\alpha-4}+3e^{\beta}=4e \\ \\ e^{\alpha-5}+e^{\beta-1}=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\alpha-4}+3e^{\beta}=4e \\ \\ e^{\alpha-4}+e^{\beta}=2e \end{cases}$$ και με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει

$2e^{\beta}=2e$ $\Leftrightarrow$ β = 1. Επίσης $\begin{cases} e^{\alpha-4}+3e^{\beta}=4e \\ \\ \beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\alpha-4}=e^{1} \\ \\ \beta=1 \end{cases}$

Άρα α = 5 , β = 1 και P(0) = 5 , Q(0) = 1.
Πιθανές ακέραιες ρίζες του P(x) είναι το ± 1 και ± 5 ενώ του Q(x) είναι το ± 1. Επίσης $P^2(x) + Q^2(x) = 0$ $\Leftrightarrow$ P(x) = 0 και Q(x) = 0 , άρα η εξίσωση (1) έχει για ρίζες τα ± 1. Δηλαδή:
P(1) = P(-1) = 0 και Q(1) = Q(-1) = 0

ii) $P(x) = (x^2 - 1)\Pi(x) + \kappa x + \lambda$ και επειδή P(1) = P(-1) = 0 προκύπτει κ = λ = 0. Το P(x) επομένως γίνεται $P(x) = (x^2 - 1)\Pi(x)$ και **P(0) = -Π(0)** (P(0),Π(0) σταθεροί όροι).

iii) Έστω $Q(x) = \beta_{2\kappa+1}x^{2\kappa+1} + \beta_{2\kappa}x^{2\kappa} + \beta_{2\kappa-1}x^{2\kappa-1} \dots + \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$.
$Q(-1) = -\beta_{2\kappa+1} + \beta_{2\kappa} - \beta_{2\kappa-1} + \dots + \beta_2 - \beta_1 + \beta_0$ (1)
$Q(1) = \beta_{2\kappa+1} + \beta_{2\kappa} + \beta_{2\kappa-1} + \dots + \beta_2 + \beta_1 + \beta_0$ (2)

Με πρόσθεση των (1) και (2) και επειδή ότι $\beta_0 = Q(0) = 1$ έχουμε
$Q(-1) + Q(1) = 2\beta_{2\kappa} + 2\beta_{2\kappa-2} + \dots + 2\beta_2 + 2Q(0) = 2(\beta_{2\kappa} + \beta_{2\kappa-2} + \dots + \beta_2 + 1)$
$\Leftrightarrow$ $0 + 0 = 2(\beta_{2\kappa} + \beta_{2\kappa-2} + \dots + \beta_2 + 1)$ $\Leftrightarrow$ $\beta_{2\kappa} + \beta_{2\kappa-2} + \dots + \beta_2 + 1 = 0$.

Θέμα 2^ο

i) Για να είναι κύκλος η εξίσωση (1) θα πρέπει $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$

$\Leftrightarrow$ $-2\mu^2 - 12\mu - 10 > 0 \Leftrightarrow \mu \in (-5, -1)$

ii) Για την τετμημένη x_κ και τεταγμένη ψ_κ του κέντρου των παραπάνω κύκλων θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} x_\kappa = -\dfrac{\mu+1}{2} \\ \psi_\kappa = \dfrac{1-\mu}{2} \\ -5 < \mu < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -2x_\kappa - 1 \\ \mu = -2\psi_\kappa + 1 \\ -5 < -2x_\kappa - 1 < -1 \\ -5 < -2\psi_\kappa + 1 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\kappa - \psi_\kappa + 1 = 0 \\ 0 < x_\kappa < 2 \\ 1 < \psi_\kappa < 3 \end{cases}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων είναι το ευθύγραμμο τμήμα, μέρος της ευθείας t: χ – ψ + 1 = 0, με άκρα τα σημεία Γ(0,1) , Δ(2,3) χωρίς τα άκρα Γ και Δ.

iii) Είναι (ε) // (t) // (δ) με την ευθεία (t) μεσοπαράλληλη των (ε) και (δ) αφού αυτές τέμνουν τον άξονα χ΄χ στα σημεία Α(1,0), Μ(-1,0), Β(-3,0) με το σημείο Μ να είναι μέσο του ΑΒ. Επειδή τα κέντρα των κύκλων βρίσκονται στην ευθεία (t), αρκεί η ακτίνα τους να είναι μικρότερη ή ίση της απόστασης των ευθειών (t) και (ε).

$$d(t,\varepsilon) = d(\mathrm{M},\varepsilon) = \frac{|-1 + 0\cdot(-1) - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad (1)$$

Και $\rho = \dfrac{1}{2}\sqrt{-2\mu^2 - 12\mu - 10}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) αρκεί να ισχύει

$$\frac{1}{2}\sqrt{-2\mu^2 - 12\mu - 10} \le \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow -2\mu^2 - 12\mu - 10 \le \left(2\sqrt{2}\right)^2$$

$\Leftrightarrow 2(\mu+3)^2 \ge 0$ που ισχύει.

iv) $\rho_{\max} = \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{-2\mu^2 - 12\mu - 10}\right)_{\max} = \left(-2\mu^2 - 12\mu - 10\right)_{\max}$

Αλλά f(μ) = $-2\mu^2 - 12\mu - 10 = -2\left(\mu^2 + 6\mu + 5\right) = -2[(\mu+3)^2 - 4]$

$= -2(\mu+3)^2 + 8$. Άρα f(μ) $-8 = -2(\mu+3)^2 \le 0 \Leftrightarrow f(\mu) - 8 \le 0$

$\rho_{\max}$ έχουμε όταν f(μ) = 8 το οποίο ισχύει όταν μ = -3, όπου -5 < μ < -1.

Όταν μ = -3 τότε έχουμε κύκλο με κέντρο Κ(1,2) και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$.

Επομένως ο κύκλος με την μεγαλύτερη ακτίνα είναι ο

C: $(\chi - 1)^2 + (\psi - 2)^2 = 2$

Σύλλογος Θετικών
Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου

<u>ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ</u> : Τάξη: Β΄

Δράμα 3 Απριλίου 2011

<u>Θέμα 1ο</u>

i) Αρχικά για την λύση του δοθέντος συστήματος θέτω $P(0) = \alpha$ και $Q(0) = \beta$ οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} e^{P(0)-4} + 3e^{Q(0)} = 4e \\ e^{P(0)-5} + e^{Q(0)-1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\alpha-4} + 3e^{\beta} = 4e \\ e^{\alpha-5} + e^{\beta-1} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\alpha-4} + 3e^{\beta} = 4e \\ e^{\alpha-4} + e^{\beta} = 2e \end{cases}$$ και με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει

$2e^{\beta} = 2e \Leftrightarrow \beta = 1$. Επίσης $\begin{cases} e^{\alpha-4} + 3e^{\beta} = 4e \\ \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\alpha-4} = e^{1} \\ \beta = 1 \end{cases}$

Άρα $\alpha = 5$, $\beta = 1$ και $P(0) = 5$, $Q(0) = 1$.
Πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(x)$ είναι το ± 1 και ± 5 ενώ του $Q(x)$ είναι το ± 1. Επίσης $P^2(x) + Q^2(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$ και $Q(x) = 0$, άρα η εξίσωση (1) έχει για ρίζες τα ± 1. Δηλαδή:
$P(1) = P(-1) = 0$ και $Q(1) = Q(-1) = 0$

ii) $P(x) = (x^2 - 1)\Pi(x) + \kappa x + \lambda$ και επειδή $P(1) = P(-1) = 0$ προκύπτει $\kappa = \lambda = 0$. Το $P(x)$ επομένως γίνεται
$P(x) = (x^2 - 1)\Pi(x)$ και **$P(0) = -\Pi(0)$** ($P(0)$,$\Pi(0)$ σταθεροί όροι).

iii) Έστω $Q(x) = \beta_{2\kappa+1}x^{2\kappa+1} + \beta_{2\kappa}x^{2\kappa} + \beta_{2\kappa-1}x^{2\kappa-1} \ldots + \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$.
$Q(-1) = -\beta_{2\kappa+1} + \beta_{2\kappa} - \beta_{2\kappa-1} + \ldots + \beta_2 - \beta_1 + \beta_0$ (1)
$Q(1) = \beta_{2\kappa+1} + \beta_{2\kappa} + \beta_{2\kappa-1} + \ldots + \beta_2 + \beta_1 + \beta_0$ (2)

Με πρόσθεση των (1) και (2) και επειδή ότι $\beta_0 = Q(0) = 1$ έχουμε
$Q(-1) + Q(1) = 2\beta_{2\kappa} + 2\beta_{2\kappa-2} + \ldots + 2\beta_2 + 2Q(0) = 2(\beta_{2\kappa} + \beta_{2\kappa-2} + \ldots + \beta_2 + 1)$
$\Leftrightarrow 0 + 0 = 2(\beta_{2\kappa} + \beta_{2\kappa-2} + \ldots + \beta_2 + 1) \Leftrightarrow \beta_{2\kappa} + \beta_{2\kappa-2} + \ldots + \beta_2 + 1 = 0$.

Θέμα 2ο

i) Για να είναι κύκλος η εξίσωση (1) θα πρέπει $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$

$\Leftrightarrow$ $-2\mu^2 - 12\mu - 10 > 0 \Leftrightarrow \mu \in (-5, -1)$

ii) Για την τετμημένη x_κ και τεταγμένη ψ_κ του κέντρου των παραπάνω κύκλων θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} x_\kappa = -\dfrac{\mu+1}{2} \\ \psi_\kappa = \dfrac{1-\mu}{2} \\ -5 < \mu < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -2x_\kappa - 1 \\ \mu = -2\psi_\kappa + 1 \\ -5 < -2x_\kappa - 1 < -1 \\ -5 < -2\psi_\kappa + 1 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\kappa - \psi_\kappa + 1 = 0 \\ 0 < x_\kappa < 2 \\ 1 < \psi_\kappa < 3 \end{cases}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων είναι το ευθύγραμμο τμήμα, μέρος της ευθείας t: $\chi - \psi + 1 = 0$, με άκρα τα σημεία Γ(0,1) , Δ(2,3) χωρίς τα άκρα Γ και Δ.

iii) Είναι (ε) // (t) // (δ) με την ευθεία (t) μεσοπαράλληλη των (ε) και (δ) αφού αυτές τέμνουν τον άξονα χ΄χ στα σημεία A(1,0), M(-1,0), B(-3,0) με το σημείο M να είναι μέσο του AB. Επειδή τα κέντρα των κύκλων βρίσκονται στην ευθεία (t), αρκεί η ακτίνα τους να είναι μικρότερη ή ίση της απόστασης των ευθειών (t) και (ε).

$$d(t,\varepsilon) = d(\mathrm{M},\varepsilon) = \frac{|-1+0\cdot(-1)-1|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad (1)$$

Και $\rho = \dfrac{1}{2}\sqrt{-2\mu^2 - 12\mu - 10}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) αρκεί να ισχύει

$$\frac{1}{2}\sqrt{-2\mu^2 - 12\mu - 10} \le \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow -2\mu^2 - 12\mu - 10 \le \left(2\sqrt{2}\right)^2$$

$\Leftrightarrow 2(\mu+3)^2 \ge 0$ που ισχύει.

iv) $\rho_{\max} = \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{-2\mu^2 - 12\mu - 10}\right)_{\max} = \left(-2\mu^2 - 12\mu - 10\right)_{\max}$

Αλλά f(μ) = $-2\mu^2 - 12\mu - 10 = -2\left(\mu^2 + 6\mu + 5\right) = -2[(\mu+3)^2 - 4]$

$= -2(\mu+3)^2 + 8$. Άρα f(μ) $-8 = -2(\mu+3)^2 \le 0 \Leftrightarrow f(\mu) - 8 \le 0$

$\rho_{\max}$ έχουμε όταν f(μ) = 8 το οποίο ισχύει όταν μ = -3, όπου -5 < μ < -1.

Όταν μ = -3 τότε έχουμε κύκλο με κέντρο K(1,2) και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$.

Επομένως ο κύκλος με την μεγαλύτερη ακτίνα είναι ο

C: $(\chi - 1)^2 + (\psi - 2)^2 = 2$