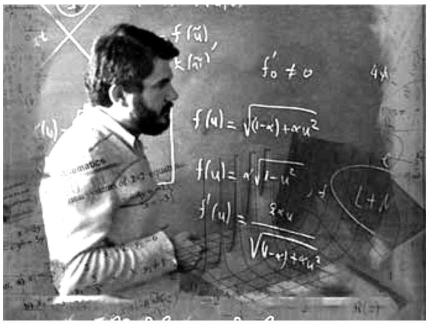
Σύλλογος Θετικών
Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη
του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου



Μαθηματικά : Τάξη: Γ΄

Δράμα 3 Απριλίου 2011

Θέμα 1ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει:
$f^5(x) + 5f(x) - 5x = 0$. (1)

Α. Να εξεταστεί η μονοτονία της f.

Β. Δίνεται η $g : R \to R$ η οποία είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη και ο μιγαδικός αριθμός $z = 9 + g^2(x+2) + 6g(x^2) \cdot i$ με
$f^5(|\bar{z} + i|) - f^5(|z-1|) \geq 5(|\bar{z} + i| - |z-1|)$

i) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z.

ii) Να δείξετε ότι $g(4) = g(1) = 3$.

iii) Να δείξετε ότι η $g^{(3)}(x) = 0$.
έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (1,4)

Θέμα 2ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει:
$f'(x) \cdot f(\alpha - x) = \beta$ για κάθε $x \in R$ $\alpha, \beta \in R$ και $\beta > 0$.
Δίνονται επίσης $2f(0) = f'(0) = 2$.

Α. Να βρεθεί η συνάρτηση f.

Β. Δίνεται ο μιγαδικός $z_x = x + \lambda + i \cdot f\left(\frac{x}{2}\right)$, $\lambda \in R$, $x \in R$

i) Να εξετάσετε αν το $|z_x|$ έχει ελάχιστη τιμή.

ii) Άν λ = 1 και z_{x_0} ο μιγαδικός για τον οποίο ισχύει
$\mathrm{Re}(z_{x_0}) = \mathrm{Im}(z_{x_0})$, να βρεθεί ο $\nu \in N^*$ ώστε:
$(z_{x_0})^\nu = 2^9 \cdot i$

ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ : Τάξη: **Γ΄**

Δράμα 3 Απριλίου 2011

Θέμα 1ο

Α. Επειδή f είναι παραγωγίσιμη η σχέση (1) γίνεται:

$5f^4(x)f'(x)+5f'(x)-5=0 \Leftrightarrow 5f'(x)\left(f^4(x)+1\right)=5 \Leftrightarrow$

$f'(x)=\dfrac{1}{f^4(x)+1}>0.$ Άρα $f\uparrow$.

Β. **i)** $f^5\left(\left|\bar{z}+i\right|\right)-f^5\left(\left|z-1\right|\right)\geq 5\left(\left|\bar{z}+i\right|-\left|z-1\right|\right)\Leftrightarrow$

$f^5\left(\left|\bar{z}+i\right|\right)-5\left|\bar{z}+i\right|\geq f^5\left(\left|z-1\right|\right)-5\left|z-1\right|$ (λόγω της σχέσης (1))

$\Leftrightarrow -5f\left(\left|\bar{z}+i\right|\right)\geq -5f\left(\left|z-1\right|\right)\Leftrightarrow f\left(\left|\bar{z}+i\right|\right)\leq f\left(\left|z-1\right|\right)$ ($f\uparrow$)

$\Leftrightarrow \left|\bar{z}+i\right|\leq\left|z-1\right|\Leftrightarrow \left|\bar{z}+i\right|^2\leq\left|z-1\right|^2\Leftrightarrow \left(\bar{z}+i\right)\cdot\left(z-i\right)\leq(z-1)\cdot(\bar{z}-1)$

$\Leftrightarrow \left(z-\bar{z}\right)\cdot i\leq-\left(z+\bar{z}\right)\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Im}(z)\cdot i\cdot i\leq -2\,\mathrm{Re}(z)\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)\geq\mathrm{Re}(z)$.

Άρα ο γ.τ των εικόνων του z είναι το ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία ψ = χ και το σημείο Α(0,1), συμπεριλαμβανομένης και της ευθεία ψ = χ.

ii) Επειδή $\mathrm{Re}(z)\leq\mathrm{Im}(z)\Leftrightarrow 9+g^2(x+2)\leq 6\cdot g\left(x^2\right)$

Έστω η συνάρτηση $h(x)=9+g^2(x+2)-6\cdot g\left(x^2\right)$ στο R.

Ισχύει $h(x)\leq 0$.

$h(2)=\left(g(4)-3\right)^2\leq 0.$ Άρα $g(4)=3$.

$h(-1)=\left(g(1)-3\right)^2\leq 0.$ Άρα $g(1)=3$.

iii) Θεώρημα Rolle για την $g(x)$ στο [1,4], θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,4):g'(x_0)=0$.

Η h παραγωγίσιμη στο R (σύνθεση παραγωγ.συναρτήσεων)

Και μάλιστα $h'(x)=2g(x+2)\cdot g'(x+2)-12x\cdot g'(x^2)$. (1)

Επίσης $h(x)\leq h(2)=0$ και $h(x)\leq h(-1)=0.$ Άρα.

- $h(x)$ παρουσιάζει max στα -1, 2
- -1, 2 εσωτερικά σημεία του D_h
- $h(x)$ παραγωγίσιμη στα -1, 2.

Επομένως θεώρημα Fermat, $h'(-1) = h'(2) = 0$

Άρα η (1) για χ = -1 και χ = 2 γίνεται:

$$0 = 2g(1) \cdot g'(1) + 12g'(1) \Leftrightarrow 18g'(1) = 0 \Leftrightarrow g'(1) = 0$$

Και

$$0 = 2g(4) \cdot g'(4) - 24g'(4) \Leftrightarrow -18g'(4) = 0 \Leftrightarrow g'(4) = 0$$

Θεώρημα Rolle για την $g'(x)$ στο $[1, x_0]$ και $[x_0, 4]$

Θα υπάρχουν : ένα $x_1 \in (1, x_0) : g''(x_1) = 0$ και

$x_2 \in (x_0, 4) : g''(x_2) = 0$.

Τέλος επειδή g είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη σύμφωνα

Με το Θεώρημα Rolle για την $g''(x)$ στο $[x_1, x_2]$ θα υπάρχει

Ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (1,4) : g^{(3)}(x) = 0.$

Θέμα 2ο

Α. $f'(x) \cdot f(\alpha - x) = \beta$ (1). Στη θέση του x θέτω $\alpha - x$

$f'(\alpha - x) \cdot f(x) = \beta$

με αφαίρεση των παραπάνω σχέσεων κατά μέλη έχουμε

$$f'(x) \cdot f(\alpha - x) - f'(\alpha - x) \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \cdot f(\alpha - x) + \left(f(\alpha - x)\right)' \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$\left[f(x) \cdot f(\alpha - x)\right]' = 0$. Άρα $f(x) \cdot f(\alpha - x) = c$ (2)

Από την σχέση $f'(\alpha - x) \cdot f(x) = \beta$ η $f(x) \neq 0$ γιατί αλλιώς θα είχαμε $0 = \beta > 0$ άτοπο. Επομένως ως συνεχής αφού είναι παραγωγίσιμη θα διατηρεί πρόσημο. Επίσης $f(0) = 1 > 0$ άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$.

Διαιρώ κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2)

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{\beta}{c}$. Για χ = 0 $\dfrac{f'(0)}{f(0)} = \dfrac{\beta}{c} \Leftrightarrow \dfrac{\beta}{c} = 2$

Άρα $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2 \Leftrightarrow (\ln f(x))' = (2x)' \Leftrightarrow$

$\ln f(x) = 2x + c$ και για χ = 0 είναι $c = 0$

Άρα $f(x) = e^{2x}$

B. **i)** Επειδή $f(x)=e^{2x}$, $z_x = x+\lambda + i\cdot e^x$

$|z_x| = \sqrt{x^2+2\lambda x+\lambda^2+e^{2x}}$.

Έστω η συνάρτηση $\phi(x)=x^2+2\lambda x+\lambda^2+e^{2x}$ στο R.

$\phi'(x)=2x+2\lambda+2e^{2x}$ στο A = R και

$\phi''(x)=2+4e^{2x}>0$. Άρα $\phi'(x)\uparrow$. Επομένως

$\phi'(\mathrm{A})=\left(\lim_{x\to-\infty}\phi'(x),\ \lim_{x\to+\infty}\phi'(x)\right)=(-\infty,+\infty)$.

Επειδή $0\in\phi'(\mathrm{A})$, και $\phi'\uparrow$ στο A, υπάρχει μοναδικός $x_0\in \mathrm{A}=R$ έτσι ώστε $\phi'(x_0)=0$. Επίσης λαμβάνοντας υπόψη την μονοτονία της $\phi'(x)$ θα έχουμε:

Για $x>x_0 \Leftrightarrow \phi'(x)>\phi'(x_0)=0$ και

$x<x_0 \Leftrightarrow \phi'(x)<\phi'(x_0)=0$

Επομένως $\phi(x)\downarrow(-\infty,x_0]$ και $\phi(x)\uparrow[x_0,+\infty)$, άρα έχει ελάχιστη τιμή στο x_0.

ii) Για λ = 1 , $z_x = x+1+i\cdot e^x$

Για τον μιγαδικό που προκύπτει από την

$\mathrm{Re}(z_{x_0})=\mathrm{Im}(z_{x_0})$ έχουμε $e^x = x+1$

Έστω $g(x)=e^x-x-1$ στο R.

Προφανής ρίζα $g(0)=0$.

$g'(x)=e^x-1$ και $g'(0)=0$. Επίσης

$g'(x)>0$ όταν $x>0$ και $g'(x)<0$ όταν $x<0$.

$g(x)\downarrow(-\infty,0]$ και $g(x)\uparrow[0,+\infty)$.

$x>0\Leftrightarrow g(x)>g(0)=0 \quad (g(x)\uparrow)$

$x<0\Leftrightarrow g(x)>g(0)=0 \quad (g(x)\downarrow)$

Επομένως $g(x)>0$ όταν $x\neq 0$.

Άρα το μηδέν μοναδική ρίζα, και ο $z_{x_0}=1+i$.

$(z_{x_0})^\nu = 2^9\cdot i$,άρα $|(z_{x_0})^\nu| = |2^9\cdot i| \Leftrightarrow$

$(\sqrt{2})^\nu = 2^9 \Leftrightarrow \quad 2^{\frac{\nu}{2}} = 2^9 \Leftrightarrow \nu = 18$. **Επαλήθευση** για ν=18

$(1+i)^{18} = \left[(1+i)^2\right]^9 = (2\cdot i)^9 = 2^9\cdot i^8\cdot i = 2^9\cdot i$.