Διαγωνισμός Μαθηματικών – Φυσικής
« Ξανθόπουλος Βασίλης »
22 Απριλίου 2007
Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου

Θέμα 1ο

Α. Να λυθεί η εξίσωση $\ln x + x^2 = 1$

Β. Έστω $A=(0, \pi)$

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \to R$ και $g: A \to R$ με

- $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x}$
- $\ln g(x) + (g(x))^2 = x(\ln x + 1) + \dfrac{e^2+1}{e^2}$ για κάθε $x \in A$

όπου g παραγωγίσιμη συνάρτηση στο Α με $g(x) > 0$ για κάθε $x \in A$

i) Να βρεθεί το σύνολο τιμών f(A) της f.

ii) Δείξτε ότι η g έχει ελάχιστη τιμή το 1.

iii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 1 - g(x) - f(x)$, $x \in A$

α) Δείξτε ότι $h(x) < 0$ για κάθε $x \in A$

β) Έστω $0 < x_1 < x_2 < x_3 < \pi$ και $h(x_1) - h(x_2) + h(x_3) = 0$

Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_3)$ τέτοιο ώστε $h'(x_0) = 0$

Θέμα 2ο

Για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Έστω ότι ο μιγαδικός $w = \frac{2 + if(1)}{1 + if(0)}$ είναι φανταστικός αριθμός και η εικόνα του M(w) ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο.

i) Δείξτε ότι $f(1) = -1$ και $f(0) = 2$

ii) Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) - 3x_0 = 0$.

iii) Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_0, 1)$ τέτοιο ώστε $3f(\xi) = 3x_0 - 2$

iv) Δείξτε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)(\xi - x_0) = 2 f'(\xi_2)(1-\xi)$

v) Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0, 1)$ τέτοια ώστε $\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{3}{f'(\xi_3)}$

vi) Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x)\cdot f'(x) = -3x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (0, 1)

vii) Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων K(z) του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει $|z - w| = 2$.