ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2_Α

<u>ΜΑΘΗΜΑ:</u> Άλγεβρα
<u>ΤΑΞΗ:</u> Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
<u>ΥΛΗ:</u> Πολυώνυμα – Σχήμα Horner

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ για το οποίο ισχύει $[\mathrm{P}(x)]^2 = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4$.

2. Θεωρούμε δύο πολυώνυμα $\mathrm{P}(x)$ και $Q(x)$.
i) Αν $Q(x) = \mathrm{P}(\mathrm{P}(x))$ και ο αριθμός α είναι ρίζα του $\mathrm{P}(x) - x$, να αποδείξετε ότι ο α είναι ρίζα και του $Q(x) - x$.
ii) Αν τα $\mathrm{P}(x)$ και $Q(x)$ δεν έχουν κοινή ρίζα, να αποδείξετε ότι συμβαίνει το ίδιο και με τα πολυώνυμα $\mathrm{P}(x) + Q(x)$ και $\mathrm{P}(x) - Q(x)$.

3. i) Να βρείτε πολυώνυμα $\mathrm{P}(x)$ $3^{ου}$ βαθμού τέτοιο, ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό x να ισχύει $\mathrm{P}(x) - \mathrm{P}(x-1) = x^2$ και το $\mathrm{P}(x)$ να έχει ρίζα το μηδέν.
ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + \nu^2$, όπου ν θετικός ακέραιος.

4. i) Για ποιους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{\beta}{x+1}$ για κάθε x με $x \neq 0$ και $x \neq -1$;
ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + ... + \dfrac{1}{999 \cdot 1000}$.

5. Αν δύο πρωτοβάθμια πολυώνυμα παίρνουν τις ίδιες τιμές για δύο διαφορετικές τιμές της μεταβλητής x, να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα αυτά είναι ίσα.

6. Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $\mathrm{P}(x) = x^6 + 2x^5 - x^3 + 7x - 2$ με το $x - 2$, χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner.

7. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β ώστε το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = x^3 + ax^2 + \beta x - 6$ να έχει παράγοντες τα διώνυμα $x - 1$, $x + 2$ και μετά να αναλύσετε το $\mathrm{P}(x)$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

8. Αν οι διαιρέσεις $\mathrm{P}(x):(x+1)$ και $\mathrm{P}(x):(x-2)$ δίνουν υπόλοιπο 2 και -3 αντίστοιχα, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $\mathrm{P}(x):(x^2 - x - 2)$.

9. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = (x+1)^{2\nu} - x^{2\nu} - 2x - 1$, όπου ν θετικός ακέραιος, διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x) = 2x^3 + 3x^2 + x$.

10. Αν $x - 3$ είναι παράγοντας του πολυώνυμου $\mathrm{P}(x)$, να αποδείξετε ότι το $x - 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $\mathrm{P}(4x - 5)$.

11. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $\mathrm{P}(x)$ με το $x^2 - a^2$, όπου $a \neq 0$, είναι το $\upsilon(x) = \frac{1}{2a}[\mathrm{P}(a) - \mathrm{P}(-a)]x + \frac{1}{2}[\mathrm{P}(a) + \mathrm{P}(-a)]$.

12. Αν τα πηλίκα των διαιρέσεων $\mathrm{P}(x):(x-a)$ και $\mathrm{P}(x):(x-\beta)$, όπου $a \neq \beta$, είναι $\pi_1(x)$ και $\pi_2(x)$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\pi_1(\beta) = \pi_2(\alpha)$.

13. Να αποδείξετε ότι το $(x-1)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $\mathrm{P}(x) = 2x^5 - 9x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 8x - 1$

14. Για ποιους πραγματικούς αριθμούς α και β το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = x^\nu + ax + \beta$, που ν ακέραιος και $\nu \geq 2$, διαιρείται με το $(x-1)^2$; Ποιο είναι το πηλίκο της διαίρεσης $\mathrm{P}(x):(x-1)^2$;

15. Αν $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης $\mathrm{P}(x):(x-a)$, να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $\mathrm{P}(x):(x-a)^2$ είναι $\upsilon(x) = \pi(a)\cdot x + (\mathrm{P}(a) - \alpha\pi(a))$.

16. Να λύσετε την εξίσωση $x^4 + x^3 - 31x^2 - 25x + 150 = 0$.

17. Να βρεθεί ο ακέραιος λ για τον οποίο η εξίσωση $(3\lambda^3 + 1)x^4 - (6\lambda + 4)x^3 + (7\lambda^2 + 8)x - 9\lambda = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό 1 και στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση αυτή.

18. Να λύσετε τις ανισώσεις

α) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 < 0$ β) $x^3 - 3x + 2 \geq 0$

γ) $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$ δ) $(x+2)^3 \leq 8x^2 + 16x$

19. Να λύσετε α) την εξίσωση $(2x^2 - 3x + 1)^2 - 2(4x^2 - 6x) = 16$ και β) την ανίσωση $x^{10} + 31x^5 \leq 32$.

20. Να λυθεί η κλασματική εξίσωση $\frac{x}{x^2 - 3x + 2} - \frac{x+2}{x^2 - 1} = \frac{2x+1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$.

21. Να λύσετε τις ανισώσεις α) $\frac{x^2 + x + 1}{x} < \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}$ και β) $\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 2} \geq \frac{x}{2}$.

22. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $\sqrt{9x - 2} = 3x - 2$, β) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x - 19} = 10$ και

γ) $\sqrt{11 - 2x} - \sqrt{2 + 2x} = -1$

23. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x - 13} - \sqrt{x - 8} = \sqrt{x + 8} - \sqrt{x + 19}$.

24. Να λύσετε τις ανισώσεις

α) $\sqrt{x^2 - 2x + 6} \geq 2x - 3$, β) $x - 1 \leq \sqrt{x+1}$

γ) $\sqrt{x-8} + \sqrt{x-5} < 3$.

25. Να λύσετε την εξίσωση $4\eta\mu^8 x + 18\eta\mu^6 x + 28\eta\mu^4 x + 9\sigma\upsilon\nu 2x - 5 = 0$, $x \in [0, 2\pi]$.