

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 04_B

ΜΑΘΗΜΑ: Άλγεβρα

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΥΛΗ: ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1). Να βρείτε το άγνωστο x σε κάθε μια από τις ισότητες

$$\alpha) \log_8 x = -\frac{5}{3}, \quad \beta) \log_x 3 = \frac{1}{4}, \quad \gamma) e^{2 \ln x} = 4$$

2). Να αποδείξετε την ισότητα $3 \log_3 2 - \log_3 32 + 2 \log_3 6 = 2$

3). Να υπολογίσετε τους αριθμούς

$$\alpha) 3^{1+2 \log_3 2}, \quad \beta) 10^{2-\frac{1}{2} \log 5}, \quad \gamma) \left(\frac{1}{e}\right)^{2-\ln \sqrt{2}}, \quad \delta) a^{\frac{\ln(\ln a)}{\ln a}}$$

4). Να αποδείξετε τις ισότητες

$$\alpha) \log_{\alpha\beta\gamma} \delta = \frac{\log \delta}{\log \alpha + \log \beta + \log \gamma}, \quad \beta) \log_a x - \log_\beta y = \log_a y (\log_y x - \log_\beta a)$$

5). Να βρεθεί ο αριθμός x που ικανοποιεί την ισότητα $\log_x \sqrt[3]{81} - \log_x \sqrt{27} + \frac{1}{6} = 0$

6). Να βρείτε τον άγνωστο x στις παρακάτω ισότητες

$$\alpha) \log_2(x+1) = 3, \quad \beta) \log_2 x = -\frac{1}{2}, \quad \gamma) \log_x 49 = -2$$

$$\delta) \log_x 5 = \frac{1}{3}, \quad \epsilon) \log_x 8 + 2 \log_x \sqrt{x} = 1 \quad \sigma\tau) \log_x 27 = x, x \in \mathbb{N}^*$$

7). Να αποδείξετε τις ισότητες

$$\alpha) 3 \log 2 + \log 5 = 1 + \log 4$$

$$\beta) \log 4 + \log 25 = 2$$

$$\gamma) \ln(2e) - 1 = \ln 2$$

$$\delta) \log(2 + \sqrt{2}) + \log(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \log(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}) = \log 2$$

8). Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\begin{array}{lll} \alpha) 2^{2-3x} = 10, & \beta) e^x = 10 & \gamma) \frac{10^x - 1}{10^x + 1} = \frac{2}{5} \\ \delta) 2^{x^2-1} = 4 & \epsilon) 2^x = 3 & \sigma\tau) e^{2x-1} = 2 \\ \zeta) \frac{e^x}{2} = \frac{1}{e} & \eta) 2e^{x-1} = 1 & \iota) e^{2x-1} = e^2 \\ \kappa\alpha) e^{2\ln(x)} = 4 & \iota\beta) e^{2x} = 0 & \end{array}$$

9). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, καθώς και τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες συντεταγμένων

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων.

10). Να λυθούν οι λογαριθμικές εξισώσεις

α) $\log(x-1) + \log(x+2) = 2(1 - \log 5)$

β) $\ln(x-1) = \ln 2 + \frac{1}{3}\ln(x-2)$

γ) $\log(9^{x-1} + 7) = \log 4 + \log(3^{x-1} + 1)$

δ) $x \log 5 - \log(1 + 2^x) = x - \log 6$

11). Να λύσετε τις ανισώσεις: α) $e^{2x} - 3e^x + 2 < 0$, β) $x^{\ln x} > e$

12). α) Να αποδείξετε ότι $x^{\ln y} = y^{\ln x}$ για κάθε $x, y > 0$

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^{\ln 2} + 2^{\ln x} > \frac{2}{x}$

13). Για ποιες τιμές της θετικής παραμέτρου a η εξίσωση $(1 - \ln a)x^2 - (2 + \ln a)x - 4 = 0$, έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα;

14). Να λύσετε τις λογαριθμικές εξισώσεις:

α) $\log(4x-1) - 2\log 2 = \log(x^2 - 1)$

β) $2\ln(1-2x) - \ln(x+1-2x^2) = \ln(1-4x) - \ln(1-x)$

γ) $\log(7x-2)^2 + \log(3x-1)^2 = 2$