ΦΥΛΛΑΔΙΟ 01_C

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΤΑΞΗ: Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΥΛΗ: Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων
Το φυλλάδιο και τις λύσεις μπορείτε να τα βρείτε στο math-gr.blogspot.com

1. Αν $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 3$ και η γωνία των $\vec{a},\vec{b}$ είναι ίση με $\frac{\pi}{3}$, να βρείτε τους αριθμούς

i) $\vec{a}\vec{b}$ ii) $\vec{a}^2$ iii) $(\vec{a}-2\vec{b})(3\vec{a}+\vec{b})$ iv) $\left(2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)^2$

2. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}=(2,1)$ και $\vec{b}=(2+\sqrt{3},1-2\sqrt{3})$.

3. Αν $|\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = 1$ και η γωνία των $\vec{a},\vec{b}$ είναι ίση με $\frac{2\pi}{3}$, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $2\vec{a}+\vec{b}$ και $\vec{a}-2\vec{b}$.

4. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα και η διαφορά δύο διανυσμάτων έχουν το ίδιο μέτρο, αν και μόνο αν τα διανύσματα αυτά είναι κάθετα. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά την παραπάνω πρόταση, όταν τα διανύσματα δεν είναι συγγραμμικά.

5. Να αποδείξετε ότι $|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2\right)$.

6. Να βρεθεί διάνυσμα με μέτρο 2 κάθετο στο $\vec{a}=(-3,4)$.

7. Δίνονται τα σημεία Α(-2,2) και Β(1,1). Να βρείτε σημείο Γ του άξονα y΄y για το οποίο το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Γ.

8. Να βρείτε τον αριθμό x ώστε η γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}=((x-1)\sqrt{3},\ 2x)$ και $\vec{b}=(-\sqrt{3},1)$, να είναι $\pi/3$;

9. ($1^{\text{ο}}$ Θεώρημα Διαμέσων) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ, να αποδείξετε ότι:
$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{A\Gamma}^2 = 2\overrightarrow{AM}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}^2$.

10. ($2^{\text{ο}}$ Θεώρημα Διαμέσων) Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε ύψος ΑΔ και τη διάμεσο ΑΜ. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{A\Gamma}^2 = 2\overrightarrow{\Delta M}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}$.

11. Αν ΑΔ είναι η διάμεσος ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (όπου $A=90^{\circ}$) να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{A\Delta}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{B\Gamma}|$.

12. Αν ΑΔ είναι ύψος ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (όπου $A=90^{\circ}$), να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{A\Delta}|^2 = \overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

13. Να αποδείξετε ότι $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 \le \vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$. Να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα.

14. Να αποδείξετε ότι $\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right| \le |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|$.

15. Να εξετάσετε πότε από την ισότητα $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ προκύπτει $\vec{b}=\vec{c}$.

16. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{v}=(3,5)$ σε δύο συνιστώσες, μιας παράλληλης προς το διάνυσμα $\vec{a}=(1,2)$ και μιας κάθετης προς αυτό.

17. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}-\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\cdot\vec{b}$ είναι κάθετο στο $\vec{a}$.

18. Αν $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$, να δείξετε ότι $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=|\vec{a}|\sqrt{3}$.

19. Αν $|\vec{a}|=2$ και για κάθε x,y τα διανύσματα $x\vec{a}+y\vec{b}$ και $2y\vec{a}-3x\vec{b}$ είναι κάθετα, να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων $\vec{b}$ και $2\vec{a}-\vec{b}$.

20. Έστω τα διανύσματα $\vec{a},\vec{b}$ με μέτρο 1. Αν τα $\vec{c}=2\vec{a}+4\vec{b}$ και $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$ σχηματίζουν γωνία ίση με $\frac{2\pi}{3}$, να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a},\vec{b}$.

21. Τα κάθετα διανύσματα $\vec{a},\vec{b}$ έχουν μέτρα 4 και 4 αντίστοιχα. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{c}$ με μέτρο 1 που διχοτομεί τη γωνία τους.

22. Αν $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=1$ και η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a},\vec{b}$ είναι φ, να αποδείξετε ότι $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\phi}{2}\right|$.

23. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=(2,-3)$, $\vec{b}=(3,\sqrt{3}-6)$ και $\vec{c}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$. Να βρεθεί γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a},\vec{b}$ που έχει μέτρο 2 και είναι κάθετο στο $\vec{c}$.

24. Αν $|\vec{a}|=2$, $\left|\vec{b}\right|=2$ και η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a},\vec{b}$ είναι $\frac{2\pi}{3}$, να βρεθεί διάνυσμα $\vec{x}$ παράλληλο στο $\vec{a}-\vec{b}$, τέτοιο ώστε $\vec{a}\perp(\vec{b}+\vec{x})$.

25. Να βρεθεί ο λ ώστε η γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}=(-2,0)$ και $\vec{b}=(\lambda,-1)$ να είναι $\frac{5\pi}{6}$.

26. Αν $\vec{a}=\frac{1}{3}(-1,7)$ και $\vec{b}=-\frac{4}{3}(2,1)$, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ και $\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}$.

27. Αν $\vec{a},\,\vec{b}\neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{|\vec{a}|}{\left|\vec{b}\right|}$, να αποδειχθεί ότι $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\perp\vec{a}$.

28. Αν $\vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c})$ και $\vec{b} \perp (\vec{a} + \vec{c})$ να αποδείξετε ότι $\vec{c} \perp (\vec{a} - \vec{b})$.

29. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{b}$ με μέτρο 5 τέτοιο ώστε να ισχύει $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$, όπου $\vec{a} = (2,-3)$.

30. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{c} = \vec{b} - \left(\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \cdot \vec{a}$ είναι κάθετο στο $\vec{a}$.

31. Αν $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 7$ και $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$, να βρείτε τις γωνίες μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (ανά δύο).

32. Έστω $\vec{a}$ και $\vec{b}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα και τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{c}$ και $\vec{d}$ τέτοια ώστε το $\vec{c}$ να είναι ομόρροπο του $\vec{a}$ και το $\vec{d}$ ομόρροπο του $\vec{b}$. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\vec{x} = \dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} + \dfrac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$ είναι συγγραμμικό με τη διχοτόμο της γωνίας των $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

33. Αν $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ και $(3\vec{a} + 4\vec{b}) \perp \left(\vec{a} - \dfrac{10}{11}\vec{b} \right)$, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$.