

# Φύλλο Εργασίας

## Μάθημα: ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

### Δραστηριότητα 1

Να γίνει πλήρης μελέτη της συνάρτησης:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

### Βήμα 1

Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού. Επιπλέον, εξετάζουμε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει κάποια **συμμετρία** (δηλαδή αν είναι άρτια ή περιττή).

### Βήμα 2

Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο και τη **μονοτονία** της συνάρτησης. Εντοπίζουμε τα τοπικά ακρότατα.

### Βήμα 3

Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο και την **κυρτότητα** της συνάρτησης. Εντοπίζουμε τα σημεία καμψής. (Η κυρτότητα της συνάρτησης δίνεται από την δεύτερη παράγωγο. Αν η  $f''(x)$  είναι θετική τότε η συνάρτηση λέγεται κυρτή, αν είναι αρνητική λέγεται κοίλη. Σημεία καμψής είναι τα σημεία στα οποία αλλάζει η κυρτότητα της συνάρτησης)

### Βήμα 4

Εξετάζουμε αν η συνάρτηση έχει **κατακόρυφες ασύμπτωτες**. Αυτό συμβαίνει όταν ένα τουλάχιστον από τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  ή  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  ισούται με το  $+\infty$  ή το  $-\infty$ . αν κάτι τέτοιο συμβαίνει, τότε η ευθεία  $x = x_0$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. **Προσοχή:** Εξετάζουμε μόνο τα μεμονωμένα σημεία  $x_0$  στα οποία η συνάρτηση δεν ορίζεται.

### Βήμα 5

Εξετάζουμε αν η συνάρτηση έχει **οριζόντιες ασύμπτωτες**. Αυτό συμβαίνει όταν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$  ή όταν  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$ . Τότε λέμε ότι η ευθεία  $y = y_0$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο  $+\infty$  ή στο  $-\infty$  αντίστοιχα.

### Βήμα 6

Εξετάζουμε αν η συνάρτηση έχει **πλάγιες ασύμπτωτες**. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$ . Τότε λέμε ότι η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο  $+\infty$ . (Για το  $-\infty$  δουλεύουμε αντίστοιχα)

### Βήμα 7.

#### Χάραξη της γραφικής παράστασης.

Συνδυάζουμε την πληροφορία για την κυρτότητα και τη μονοτονία σε ένα μόνο πίνακα. Συνδυάζουμε την προηγούμενη πληροφορία (όλων των βημάτων) και σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση.

