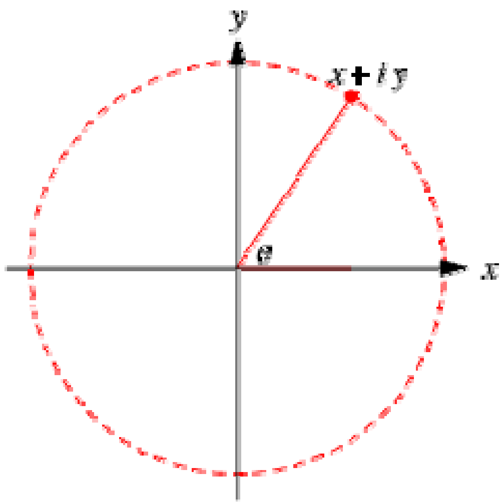
I. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ



$$e^{i\pi} = -1$$

ΜΕΡΟΣ Ι
ΟΡΙΣΜΟΣ - ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

Α. Ορισμός

Ο ορισμός του συνόλου των Μιγαδικών αριθμών ($\mathbb{C}$) βασίζεται στις εξής παραδοχές:

1. Υπάρχει ένας αριθμός i για τον οποίο ισχύει $\boxed{i^2 = -1}$.

2. Το σύνολο C έχει ως στοιχεία

- Όλους τους πραγματικούς αριθμούς,
- Όλους τους φανταστικούς αριθμούς, δηλαδή τα γινόμενα $\beta \cdot i$, όπου ο β είναι ένας πραγματικός αριθμός,
- Όλα τα αθροίσματα της μορφής $\boxed{\alpha + \beta \cdot i}$, με α, β πραγματικούς αριθμούς.

3. **Ισότητα** δύο μιγαδικών αριθμών: Δύο μιγαδικού αριθμοί είναι ίσοι αν και μόνο αν τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη τους είναι ίσα αντιστοίχως.

$$\alpha + \beta \cdot i = \gamma + \delta \cdot i \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = \delta \end{cases}, \qquad \alpha + \beta \cdot i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

4. Το **άθροισμα** δύο μιγαδικών αριθμών ορίζεται ως εξής:

$$(\alpha + \beta \cdot i) + (\gamma + \delta \cdot i) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) \cdot i,$$
$$(\alpha + \beta \cdot i) - (\gamma + \delta \cdot i) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta) \cdot i.$$

5. Το **βαθμωτό γινόμενο** ενός πραγματικού και ενός μιγαδικού ορίζεται ως εξής:

$$\lambda(\alpha + \beta \cdot i) = \lambda\alpha + \lambda\beta \cdot i.$$

6. Το **γινόμενο** δύο μιγαδικών αριθμών ορίζεται ως εξής:

$$(\alpha + \beta \cdot i) \cdot (\gamma + \delta \cdot i) = \alpha\gamma + \alpha\delta \cdot i + \beta\gamma \cdot i + \beta\delta \cdot i^2 = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\beta\gamma + \alpha\delta) \cdot i.$$

7. Ο **αντίστροφος** ενός μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + \beta \cdot i$ ορίζεται ως εξής:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\alpha + \beta \cdot i} = \frac{\alpha - \beta \cdot i}{(\alpha + \beta \cdot i)(\alpha - \beta \cdot i)} = \frac{\alpha - \beta \cdot i}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} i.$$

8. Η **διαίρεση** δύο μιγαδικών αριθμών ορίζεται ως εξής:

$$\frac{\alpha + \beta \cdot i}{\gamma + \delta \cdot i} = \frac{(\alpha + \beta \cdot i) \cdot (\gamma - \delta \cdot i)}{(\gamma + \delta \cdot i)(\gamma - \delta \cdot i)} = \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta) + (\beta\gamma - \alpha\delta) \cdot i}{\gamma^2 + \delta^2} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i,$$

όπου $\gamma + \delta \cdot i \neq 0$.

9. **Συζυγής** ενός μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + \beta \cdot i$ ορίζεται ο αριθμός $\bar{z} = \alpha - \beta \cdot i$.

Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς η έννοια του συζυγούς μιγαδικού αριθμού χρησιμοποιήθηκε για να εκφράσουμε το αποτέλεσμα της διαίρεσης δύο μιγαδικών (και της αντιστροφή μιγαδικού) στην κανονική μορφή (δηλαδή στη μορφή $\alpha + \beta \cdot i$).

10. Το **Πραγματικό Μέρος** ενός μιγαδικού αριθμού, $z = \alpha + \beta \cdot i$, είναι $\mathrm{Re}(z) = \alpha$.

11. Το **Φανταστικό Μέρος** ενός μιγαδικού αριθμού, $z = \alpha + \beta \cdot i$, είναι $\mathrm{Im}(z) = \beta$.

Β. Βασικές Ιδιότητες

Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες.

1. Δυνάμεις Μιγαδικών: Για να υπολογίσουμε τη δύναμη ενός μιγαδικού, εκτελούμε πράξεις όπως ακριβώς και στην περίπτωση των πραγματικών αριθμών, δηλαδή γενικά ισχύει:

$z^0 = 1$, $z^1 = z$, $z^\nu = z \cdot z \cdot \ldots \cdot z$, $z^{-\nu} = \dfrac{1}{z^\nu}$,

Ιδιαίτερα, για τις δυνάμεις του i έχουμε:

$$i^\nu = i^{4\rho+\upsilon} = \left(i^4\right)^\rho i^\upsilon = i^\upsilon = \begin{cases} 1, & \upsilon = 0 \\ i, & \upsilon = 1 \\ -1, & \upsilon = 2 \\ -i, & \upsilon = 3 \end{cases}.$$

2. Ιδιότητες Συζυγών:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
- $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$,
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$,
- $\overline{\left(z^\nu\right)} = \left(\overline{z}\right)^\nu$.

$\boxed{z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)}$ $\boxed{z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z) \cdot i}$

$\boxed{z = \overline{z}}$ $\Leftrightarrow$ Ο z είναι πραγματικός.

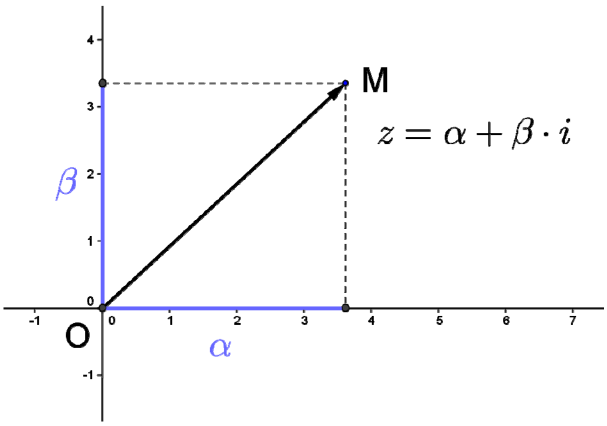
$\boxed{z = -\overline{z}}$ $\Leftrightarrow$ Ο z είναι φανταστικός.

Η απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων μπορεί να γίνει πολύ εύκολα κάνοντας τις πράξεις.

3. Επίλυση της εξίσωσης $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, όπου οι *α, β, γ* είναι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha \neq 0$.

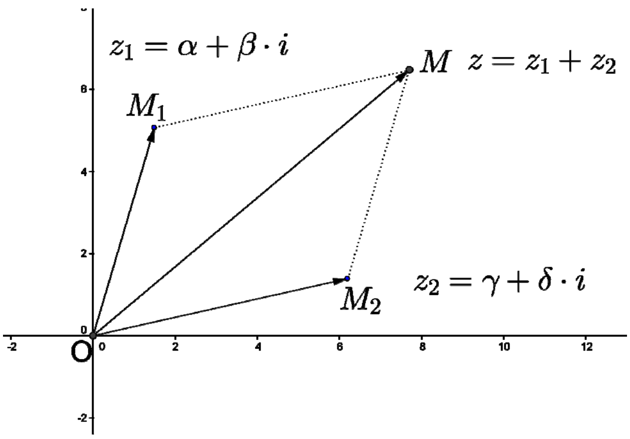
- Βήμα 1. Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.
- Βήμα 2. ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας Δ έχουμε τις εξής περιπτώσεις
  - Αν $\Delta > 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις: $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.
  - Αν $\Delta = 0$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$.
  - Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο (**συζυγείς**) μιγαδικές λύσεις $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$.

4. **Γεωμετρική Παράσταση Μιγαδικών**

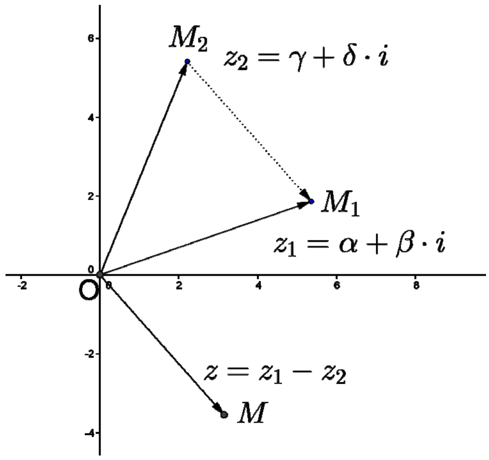


Κάθε μιγαδικός αριθμός, $z = \alpha + \beta \cdot i$, μπορεί να αναπαρασταθεί στο επίπεδο με τη βοήθεια του διανύσματος $\overrightarrow{OM} = (\alpha, \ \beta)$. Το διάνυσμα αυτό ονομάζεται συνήθως **διανυσματική ακτίνα** του μιγαδικού.

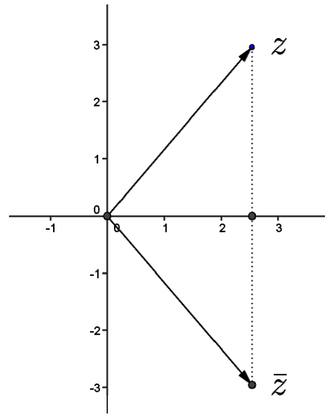
Η κατανόηση της γεωμετρικής αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών είναι πολύ σημαντική, αφού μας δίνει δυνατότητα εποπτείας των αριθμών αυτών. Το άθροισμα και η διαφορά δύο μιγαδικών μπορεί να δοθεί και με γεωμετρική μορφή όπως στα παρακάτω σχήματα.



(α) Γεωμετρική αναπαράσταση της
Πρόσθεσης δύο Μιγαδικών.



(β) Γεωμετρική αναπαράσταση της
Αφαίρεσης δύο Μιγαδικών.



(γ) Γεωμετρική αναπαράσταση του
Συζυγούς ενός Μιγαδικού.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Η ισοδυναμία $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ και $b = 0$ **δεν ισχύει** στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών!

Η ισοδυναμία $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ή $b = 0$ **ισχύει** και στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών!

Γ. Μεθοδολογία Ασκήσεων.

1. Ασκήσεις οι οποίες μας ζητάνε να εκτελέσουμε πράξεις και να φέρουμε έναν μιγαδικό στην κανονική του μορφή.

Σε αυτή την περίπτωση εκτελούμε τις πράξεις σύμφωνα με τους κανόνες που αναφέρθηκαν ανωτέρω. Στην περίπτωση της διαίρεσης πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή του παρονομαστή. Στο τέλος πρέπει να γράψουμε τον αριθμό στην μορφή $\boxed{\alpha+\beta\cdot i}$.

Παραδείγματα: Ασκήσεις 5Α, 6Α, 9Α, 2Β, σελίδες 94-97 σχολικού βιβλίου.

2. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να αποδείξουμε ότι δύο μιγαδικοί είναι ίσοι, ή μας ζητάνε να βρούμε υπό ποιές συνθήκες είναι ίσοι.

Σε αυτές τις ασκήσεις φέρνουμε τους δύο μιγαδικούς αριθμούς στην κανονική τους μορφή (δηλαδή στη μορφή $z=\alpha+\beta\cdot i$), εκτελώντας όλες τις δυνατές πράξεις, και εξισώνουμε τα πραγματικά και τα φανταστικά τους μέρη αντίστοιχα.

Παραδείγματα: Ασκήσεις 2Α, 7Α, 7Β σελίδες 94-97 σχολικού βιβλίου.

3. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να αποδείξουμε ότι ένας αριθμός είναι πραγματικός (ή φανταστικός), ή να εξετάσουμε υπό ποιές συνθήκες είναι πραγματικός (ή φανταστικός).

Αφού φέρουμε τον αριθμό στην κανονική του μορφή, θα πρέπει είτε το φανταστικό του μέρος να είναι ίσο με μηδέν, αν θέλουμε ο αριθμός να είναι πραγματικός, είτε το πραγματικό του μέρος να είναι ίσο με το μηδέν, αν θέλουμε ο αριθμός να είναι φανταστικός. Στην περίπτωση που έχουμε επιπλέον συνθήκες (για παράδειγμα μας ζητείται να αποδείξουμε ότι το πραγματικό μέρος είναι θετικό) τις λαμβάνουμε και αυτές υπ' όψη. Επιπλέον, προσέξτε ότι:

Ο z είναι πραγματικός αριθμός αν και μόνο αν $\boxed{z=\bar{z}}$.

Ο z είναι φανταστικός αριθμός αν και μόνο αν $\boxed{z=-\bar{z}}$.

Παραδείγματα: Ασκήσεις 1Α, 11Α, 1Β, 6Β, 8Β σελίδες 94-97 σχολικού βιβλίου.

4. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να αποδείξουμε ότι δύο αριθμοί είναι συζυγείς, ή να εξετάσουμε υπό ποιές συνθήκες είναι συζυγείς.

Εκτελούμε όλες πράξεις (όσες μπορούμε). Για να είναι δύο αριθμοί συζυγείς πρέπει να έχουν ίσα πραγματικά μέρη και αντίθετα φανταστικά μέρη.

5. Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να υπολογίσουμε ακέραιες δυνάμεις του *i*.

Διαιρούμε τον εκθέτη ν με τον αριθμό 4 και βρίσκουμε το πηλίκο ρ και το υπόλοιπο υ. Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$i^{\nu}=i^{4\rho+\upsilon}=\left(i^4\right)^{\rho}i^{\upsilon}=i^{\upsilon}=\begin{cases}1, & \upsilon=0\\ i, & \upsilon=1\\ -1, & \upsilon=2\\ -i, & \upsilon=3\end{cases},$$

υπολογίσουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Αν έχουμε και πιο πολύπλοκες δυνάμεις, τότε εκτελούμε όλες τις δυνατές πράξεις.
Παραδείγματα: Ασκήσεις 8Α, 3Β, 4Β, σελίδες 94-97 σχολικού βιβλίου.

6. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να λύσουμε εξισώσεις.

Α) Αν η εξίσωση είναι μια απλή **πρωτοβάθμια** εξίσωση της μορφής $az+b=0$, τη λύνουμε με το συνήθη τρόπο (χωρίζουμε γνωστούς άγνωστους και διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου). Δεν ξεχνάμε να φέρουμε την τελική λύση στην κανονική μορφή $\alpha+\beta\cdot i$.

Β) Αν η εξίσωση είναι **2ου βαθμού** της μορφής $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$, όπου οι *α, β, γ* είναι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha\neq 0$, ακολουθούμε τη μεθοδολογία που περιγράφηκε στις βασικές ιδιότητες:

- Βήμα 1. Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$.
- Βήμα 2. ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας Δ έχουμε τις εξής περιπτώσεις
  - Αν $\Delta>0$, τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις: $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.
  - Αν $\Delta=0$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$.
  - Αν $\Delta<0$, τότε η εξίσωση έχει δύο (**συζυγείς**) μιγαδικές λύσεις $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$.

Γ) Αν έχουμε την απλή δευτεροβάθμια εξίσωση $z^2=\alpha$ (δηλαδή ψάχνουμε τις τετραγωνικές ρίζες του α), τότε (αν και μπορούμε να ακολουθήσουμε τα προηγούμενα βήματα) η λύση προκύπτει ευκολότερα αν ακολουθήσουμε την παρακάτω μεθοδολογία:

- Αν $\alpha=-\theta<0$, τότε $z^2=-\theta\Leftrightarrow z^2=(-1)\cdot\theta\Leftrightarrow z^2=i^2\cdot\sqrt{\theta}^2\Leftrightarrow z^2=\left(i\sqrt{\theta}\right)^2$. Επομένως $z=i\sqrt{\theta}$, ή $z=-i\sqrt{\theta}$.
- Αν ο $\alpha\notin\mathbb{R}$, τότε είτε ακολουθούμε την διαδικασία με τη διακρίνουσα, είτε αντικαθιστούμε τον άγνωστο μιγαδικό z με $x+y\cdot i$, εκτελούμε όλες τις δυνατές πράξεις και εξισώνουμε πραγματικά και φανταστικά μέρη αντίστοιχα.

Δ) Στην περίπτωση που έχουμε **πιο πολύπλοκες** εξισώσεις, εξετάζουμε αν μπορούμε να κάνουμε παραγοντοποίηση. Τέλος, αν καμιά από τις προηγούμενες μεθοδολογίες δεν ωφελεί, **αντικαθιστούμε τον άγνωστο μιγαδικό z** με $x+y\cdot i$, εκτελούμε όλες τις δυνατές πράξεις και εξισώνουμε πραγματικά και φανταστικά μέρη αντίστοιχα. Έτσι καταλήγουμε σε ένα σύστημα (πραγματικών αριθμών) το οποίο λύνουμε κατά τα γνωστά.

Ε) Συστήματα: Εφαρμόζουμε τις γνωστές μεθοδολογίες επίλυσης συστημάτων που ισχύουν και στους πραγματικούς αριθμούς. Εναλλακτικά, μπορούμε να θέσουμε κάθε άγνωστο μιγαδικό με $x+y\cdot i$ και να δημιουργήσουμε ένα σύστημα με διπλάσιες εξισώσεις.

Παραδείγματα: Ασκήσεις 13Α, 14Β, σελίδες 94-97 σχολικού βιβλίου.

7. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε βρούμε τον γεωμετρικό τόπο ενός μιγαδικού *z*, ο οποίος ικανοποιεί μια σχέση.

Αντικαθιστούμε τον μιγαδικό z με $x+y\cdot i$, εκτελούμε τις πράξεις και προσπαθούμε να βρούμε μια σχέση μεταξύ των *x* και *y* ώστε να βρούμε το ζητούμενο γεωμετρικό τόπο (ευθεία, κύκλος, έλλειψη, κ.λ.π.).
Παραδείγματα: Ασκήσεις 9Β, σελίδες 94-97 σχολικού βιβλίου.

8. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε λύσουμε μια ανίσωση, ή να αποδείξουμε μια ανισωτική σχέση.

Προσοχή. Το σώμα των μιγαδικών αριθμών δεν είναι διατεταγμένο. Επομένως οι ανισότητες δεν έχουν νόημα. Αν μας δοθεί μια τέτοια άσκηση, αυτό θα συνεπάγεται ότι ο αριθμός που ερευνούμε είναι πραγματικός και όχι μιγαδικός. Άρα θα πρέπει πρώτα να αποδείξετε ότι ο αριθμός είναι μιγαδικός (ή να βρείτε υπό ποιές προϋποθέσεις γίνεται μιγαδικός) και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση κατά τα γνωστά.

Ασκήσεις

1. Να γράψετε στη κανονική μορφή τους αριθμούς
α) $(1-i)^3-4(2+3i)^2$, β) $(2+i)^{-1}-4(1-i)^{-2}$

2. Να γραφούν στην μορφή $\alpha+\beta\cdot i$ οι αριθμοί:
α) $\dfrac{1}{(1+i)(2-3i)}$, β) $\dfrac{1}{(2-3i)^2}$,

3. Να τεθούν στη μορφή $\alpha+\beta\cdot i$ οι παραστάσεις
α) $2i-3i^5+i^{2013}$, β) $\dfrac{2i-5i^{16}}{2-i^{13}}$

4. Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν ισχύει:
$i^{\nu}+i^{\nu+1}+i^{\nu+2}+i^{\nu+3}=\dfrac{1}{i^{\nu}}+\dfrac{1}{i^{\nu+1}}+\dfrac{1}{i^{\nu+2}}+\dfrac{1}{i^{\nu+3}}$

5. Αν οι φυσικοί αριθμοί κ, λ , μ, ν διαιρούμενοι με το 4 αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο δείξτε ότι
α) $i^{\kappa}=i^{\lambda}=i^{\mu}=i^{\nu}$.
β) $i^{\kappa+\lambda+\mu+\nu}=1$.

6. Δείξτε ότι $\dfrac{(1+i)^{\nu}}{(1-i)^{\nu-2}}=2i^{\nu-1}$, για κάθε φυσικό αριθμό ν.

7. Δείξτε ότι $(1+i)^{2\nu}+(1-i)^{2\nu}=\begin{cases}0 & \text{αν ν περιττός}\\ 2^{\nu+1} & \text{αν ο ν είναι πολλαπλάσιος του 4}\\ -2^{\nu+1} & \text{αν ο ν είναι άρτιος αλλά όχι πολλαπλάσιος του 4}\end{cases}$

8. Αν $\alpha, x\in\mathbb{R}$, δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν ισχύει η σχέση
$\left(\dfrac{\alpha x+i}{1-\alpha xi}\right)^{4\nu}+\left(\dfrac{i-\alpha x}{1+\alpha xi}\right)^{4\nu}=2$.

9. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=(1+i^{\nu})(1+i^{2\nu})$ για τις διάφορες τιμές του φυσικού αριθμού ν.

10. Να βρείτε τις τιμές της παράστασης $A=1-i+i^2-i^3+\ldots+(-1)^{\nu}i^{\nu}$ για τις διάφορες τιμές του φυσικού αριθμού ν.

11. Αποδείξτε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, ισχύει η σχέση $(\alpha+\beta\cdot i)^{2012}+(\beta-\alpha\cdot i)^{2012}=0$.

12. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει η σχέση
$(x-yi)^2=xi$.

13. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε οι $z=-(\lambda^2+i)i$ και $w=\lambda(\lambda-4i)+3i$ να είναι ίσοι.

14. Να προσδιοριστούν οι $x,y\in\mathbb{R}$, ώστε $(1-i)x+y(1+2i)=2-i$.

15. Δίνονται οι μιγαδικοί $z = 3 - \lambda i$ και $\omega = (\lambda - 1) + i$. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε ο αριθμός $z \cdot \omega$ να είναι
α) Πραγματικός β) Φανταστικός

16. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$, δείξτε ότι ο αριθμός $z = \dfrac{\beta + \alpha \cdot i}{\beta - \gamma \cdot i}$ είναι φανταστικός αν και μόνο αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

17. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ώστε η εικόνα του $z = \dfrac{1+i}{x} + \dfrac{1}{1-i}$ στο μιγαδικό επίπεδο να ανήκει στην ευθεία $y = x$.

18. Να προσδιοριστεί ο x ώστε ο αριθμός $z = \dfrac{x+i}{x - xi}$ να είναι πραγματικός.

19 Αν $z = x - 2yi$ και $\omega = y^2 + xi$, να προσδιοριστούν τα $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε

$$z = \overline{\omega}.$$

20. Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ την εξίσωση $2iz - (1+i)z = 2$.

21. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.
α) $z - 2\overline{z} = 0$ β) $z + \overline{z} = 1$ γ) $2z^2 - 3\overline{z} + 1 = 0$.

22. Να λυθεί η εξίσωση $\dfrac{z-1}{i+1} = \dfrac{z+1}{i-1} - i$, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

23. Να λυθεί η εξίσωση $(a+2)z + 4(2a+1) = a^2 + 4(z-1)$, ως προς z, όπου $a, z \in \mathbb{C}$.

24. Να λυθεί η εξίσωση $\overline{z}(1+i) - iz = 1$, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών..

25. Δίνεται η εξίσωση $z^2 + 4\kappa z - \lambda = 0$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $z \in \mathbb{C}$. Να προσδιορίσετε τις παραμέτρους κ, λ, αν ο αριθμός $1+i$ είναι λύση της εξίσωσης.

26. Να λυθεί η εξίσωση $4z^2 - 2z + 1 = 0$, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

27. Να λυθεί η εξίσωση $z^2 - (2-i)z + 3 - i = 0$, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών..

28. Να λυθεί η εξίσωση $(x^2+1)^2 + (x^2 - x - 1)^2 = 0$,
i) Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών,
ii) στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

29. Να λυθεί η εξίσωση $(z^2 - 4z + 5) + i(z+1) = 0$, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

30. Να λυθεί η εξίσωση $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z+1)^2 = 0$, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

31. Να λυθούν στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών οι εξισώσεις
i) $z^2 - 2z + 3 = 0$ ii) $(1+i)z^2 - 2\sqrt{2}iz - (1-i) = 0$

32. Να λυθεί η εξίσωση

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 - 3\left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 2 = 0\,.$$

33. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}: f(z)=a^2z+a-1,\ a\in\mathbb{C}$. Να λύσετε την εξίσωση $f(z)=z$ (σταθερά σημεία της *f*).

34. Να βρεθούν μιγαδικοί αριθμοί *z* και *ω*, τέτοιοι ώστε $z^2=\omega$ και $\omega^2=z$.

35. Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ το σύστημα

$$\begin{cases} (1-i)z-3i\omega=9-8i \\ (2+i)z+(7-2i)\omega=23+16i \end{cases}.$$

36. Υπολογίστε αριθμούς $z,\omega\in\mathbb{C}$, έτσι ώστε

$$\begin{cases} 2z+(i-1)\omega=2i \\ \bar{z}-i\omega=2 \end{cases}$$

37. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} (3-i)z+(4+2iw=2+6i \\ (4+2i)z-(2+3i)w=5+4i \end{cases}.$$

38. Να βρείτε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς *z* και *ω* για τους οποίους ισχύει η σχέση $z^2+\omega^2=0$.

39. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z, που ικανοποιούν την ανίσωση $z^2-2z\geq 0$.

40. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τη σχέση $z^3\geq 1$.

41. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ο αριθμός

$$w=\frac{\bar{z}^2}{z}$$

είναι πραγματικός.

42. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που ικανοποιούν την ανίσωση $z^2-4z+3<0$.

43. Αν το άθροισμα και το γινόμενο δύο μη πραγματικών μιγαδικών αριθμών *z* και *w* είναι πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι οι *z, w* είναι συζυγείς μιγαδικοί.

44. Να βρεθούν δύο μιγαδικοί αριθμοί με άθροισμα 4 και γινόμενο 8.

45. Έστω ότι $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$.

Αν $\frac{z_1}{2}=\frac{z_2}{3}=\frac{1}{z_3}$, δείξτε ότι $2(z_1+z_2)+(z_2-z_1)z_3i=5z_1+i$.

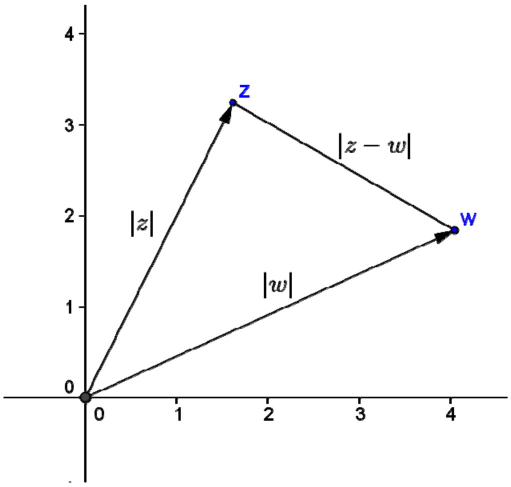
46. Αποδείξτε ότι ο αριθμός $\omega=\frac{z}{\bar{z}}-\frac{\bar{z}}{z}$ είναι φανταστικός για κάθε $z\in\mathbb{C}$. Επιπλέον, αποδείξτε ότι $\left|\mathrm{Im}(\omega)\right|\leq 2$.

ΜΕΡΟΣ ΙΙ
ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Α. Ορισμός

Έστω $M(x, y)$ η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z = x + y \cdot i$ στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως **μέτρο** του z την απόσταση του M από την αρχή των αξόνων O. Δηλαδή:

$$\boxed{|z| = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$



Στην περίπτωση όπου $z \in \mathbb{R}$, το μέτρο του z ταυτίζεται με την απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού z.

Η ποσότητα $|z - w|$ εκφράζει την απόσταση των εικόνων των z, w στο μιγαδικό επίπεδο.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γεωμετρική ερμηνεία των παραπάνω εννοιών.

Β. Βασικές ιδιότητες Μέτρου

1. $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

2. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

4. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

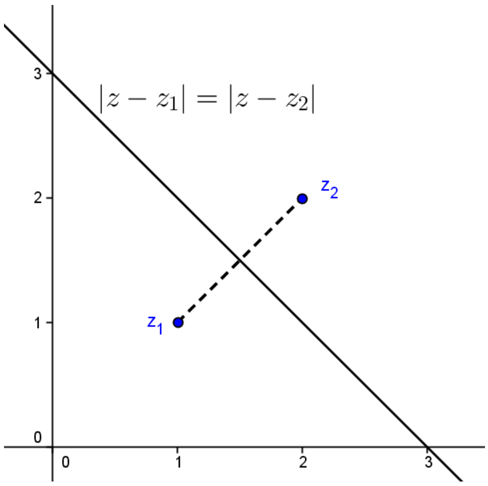
ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

$$\boxed{\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|}$$

ΒΑΣΙΚΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

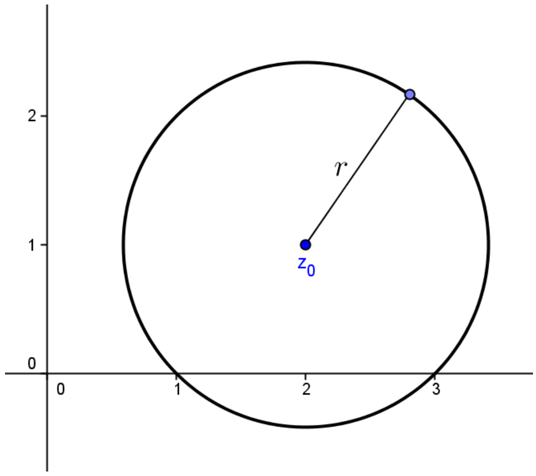
Α. Μεσοκάθετος: $|z-z_1|=|z-z_2|$

Ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z που ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τις εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2.



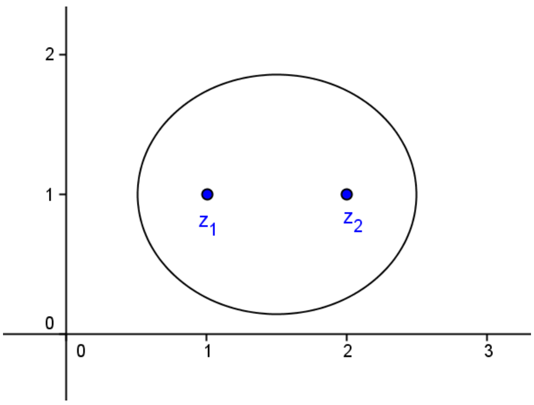
Β. Κύκλος: $|z-z_0|=r$

Ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z που ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση είναι κύκλος με κέντρο την εικόνα του μιγαδικού z_0 και ακτίνα r.



Γ. Έλλειψη: $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$

Σύμφωνα με τη γνωστή θεωρία από την Β΄ Λυκείου, ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z που ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση είναι η έλλειψη με εστίες τις εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2, εστιακή απόσταση ίση με $2\gamma=|z_2-z_1|$ και μεγάλο άξονα ίσο με $2a$.



Δ. Ανισώσεις:

1. $|z-z_1|<|z-z_2|$: Το ημιεπίπεδο που ορίζει η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τις εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2, το οποίο περιέχει την εικόνα του z_1.

2. $|z-z_0|<r$: Το εσωτερικό του κυκλικού δίσκου.

3. $|z-z_0|>r$: Το εξωτερικό του κυκλικού δίσκου.

4. Με αντίστοιχο τρόπο δουλεύουμε και για άλλους γεωμετρικούς τόπους.

ΙΔΙΑΙΤΕΡΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

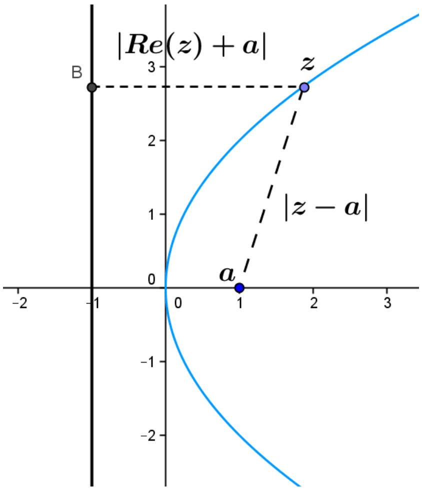
(Δεν αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο)

Α. Παραβολή:

$|z-a| = |\mathrm{Re}(z)+a|$ ή

$|z-a\cdot i| = |\mathrm{Im}(z)+a|$ (με $a\in\mathbb{R}$)

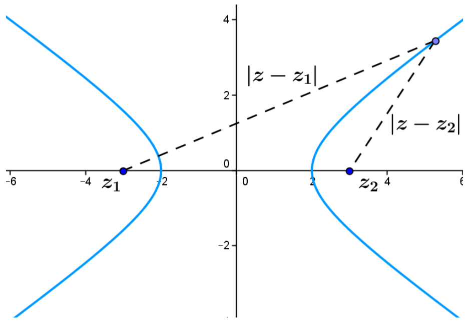
Ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z που ικανοποιούν μια από τις παραπάνω εξισώσεις είναι είτε η παραβολή $y^2 = 4\cdot a\cdot x$ είτε η παραβολή $x^2 = 4\cdot a\cdot y$ αντίστοιχα.



Β.Υπερβολή: $\big|\,|z-z_1|-|z-z_2|\,\big| = 2a$

Ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z που ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση είναι υπερβολή με εστίες τους z_1 και z_2 και μεγάλο άξονα a.

Αν μας δίνεται η εξίσωση $|z-z_1|-|z-z_2| = 2a$, με $a>0$, τότε παίρνουμε **μόνο** το κομμάτι της υπερβολής που είναι εγγύτερα στην εστία z_2. Ομοίως, αν μας δίνεται η εξίσωση $|z-z_2|-|z-z_1| = 2a$ με $a>0$, τότε παίρνουμε **μόνο** το κομμάτι της υπερβολής που είναι εγγύτερα στην εστία z_1.



Δ. Μεθοδολογία Ασκήσεων.

1. Ασκήσεις μέτρα μιγαδικών, οι οποίες μας ζητάνε να εκτελέσουμε πράξεις

Σε αυτή την περίπτωση εκτελούμε τις πράξεις σύμφωνα με τους γνωστούς κανόνες. Δεν ξεχνάμε την πολύ βασική ιδιότητα: $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, όπως επίσης και τον ορισμό του μέτρου ενός μιγαδικού: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Επιπλέον στις περιπτώσεις όπου γνωρίζουμε ότι $|z| = r$, τότε έχουμε:

$$|z|^2 = r^2 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = r^2 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{r^2}{z}.$$

Παραδείγματα: Άσκηση 1Α σχολικού βιβλίου.

2. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητείται να λύσουμε μια εξίσωση η οποία περιέχει μέτρα μιγαδικών.

Σε αυτή την κατηγορία έχουμε διάφορες περιπτώσεις.

Α) Αν μας ζητείται η επίλυση μιας εξίσωσης της μορφής, π.χ., $|z-2| = z+1$, τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον μιγαδικό $z = x + y \cdot i$ και να εκτελέσουμε πράξεις. Πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν ότι το μέτρο ενός μιγαδικού είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, επομένως το φανταστικό μέρος του z+1 θα πρέπει να είναι ίσο με 0. Εκτελώντας πράξεις βρίσκουμε τις λύσεις.

Β) Αν η άσκηση μας δίνει μια πιο πολύπλοκη εξίσωση τότε υπάρχουν δύο πιθανοί δρόμοι. Είτε χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ και προσπαθούμε με αλγεβρικές πράξεις (αναγωγές ομοίων όρων, παραγοντοποίηση, κ.λ.π.) να καταλήξουμε σε μια λύση, είτε αντικαθιστούμε τον μιγαδικό $z = x + y \cdot i$ και εκτελούμε πράξεις.

Παραδείγματα: Ασκήσεις 3Α, 4Α, σχολικού βιβλίου.

3. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητείται η απόδειξη κάποιων σχέσεων που περιέχουν μέτρα.

Σε τέτοιες ασκήσεις υπάρχουν πολλοί δρόμοι που μπορούμε να ακολουθήσουμε. Δεν ξεχνάμε τις σχέσεις και τις ιδιότητες που γνωρίζουμε και κυρίως την ιδιότητα $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

Αν η σχέση που πρέπει να αποδείξουμε περιέχει μέτρα, τότε μια πολύ καλή στρατηγική είναι να υψώσουμε στο τετράγωνο τη σχέση μας και να αντικαταστήσουμε κάθε τετράγωνο ενός μέτρου με το γινόμενο του μιγαδικού επί τον συζυγή του.

Αν μας δίνεται το μέτρο ενός μιγαδικού, $|z| = r$, και ζητείται να αποδειχθεί μια σχέση με τον μιγαδικό και τον συζυγή του τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τη στρατηγική που αναφέρθηκε και στην περίπτωση 1, δηλαδή:

$$\boxed{|z|^2 = r^2 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = r^2 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{r^2}{z}}.$$

Αν μας ζητείται να αποδείξουμε ότι μια ισότητα μιγαδικών δεν μπορεί να ισχύει ποτέ, μπορούμε να πάρουμε τα μέτρα των μιγαδικών και να αποδείξουμε ότι είναι πάντα διαφορετικά.

Παραδείγματα: Ασκήσεις 6Α, 9Α, 1Β, 2Β, 3Β, 4Β, σχολικού βιβλίου.

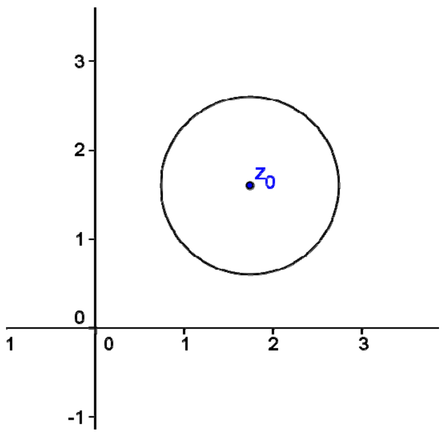
4. Ασκήσεις με γεωμετρικούς τόπους.

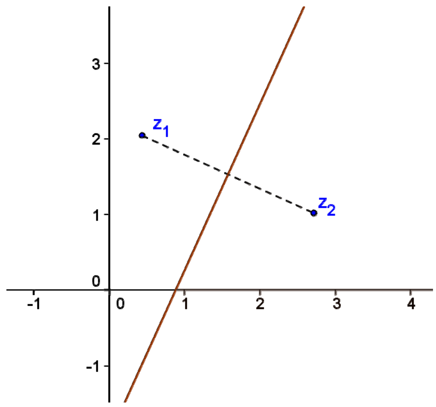
Α) Αν η άσκηση ζητάει να βρούμε έναν **απλό γεωμετρικό τόπο** από μια εξίσωση της μορφής $|z-z_0|=r$ (κύκλος) ή μια εξίσωση της μορφής $|z-z_1|=|z-z_2|$ (μεσοκάθετος), τότε απλά εφαρμόζουμε τα γνωστά από την θεωρία. Υπάρχει περίπτωση να χρειαστεί να επεξεργαστούμε πρώτα τη σχέση που μας δίνεται ώστε να προκύψει ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος. Για παράδειγμα οι μιγαδικοί που ικανοποιούν τη σχέση $|iz-1|=1$, ανήκουν σε κύκλο, αφού $|iz-1|=|iz+i^2|=|i\cdot(z+i)|=|i|\cdot|z+i|=|z+i|$. Συμβουλευτείτε την ανάλυση που έχει προηγηθεί στις σελίδες 13, 14.

Στην περίπτωση που έχουμε ανίσωση αντί για εξίσωση τότε:

1. Αν $|z-z_0|<r$, ο γεωμετρικός τόπος είναι ο όλα τα σημεία του κυκλικού δίσκου εκτός της περιφέρειας. Αν $|z-z_0|>r$, τότε ο γεωμετρικός τόπος είναι όλα τα σημεία έξω από την περιφέρεια του κύκλου.

2. Αν $|z-z_1|<|z-z_2|$, τότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος αποτελείται από όλα τα σημεία του ημιεπιπέδου που ορίζεται από τη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος, το οποίο ενώνει τις εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και περιέχει το σημείο z_1. Στην περίπτωση $|z-z_1|>|z-z_2|$, ο γεωμετρικός τόπος είναι το ημιεπίπεδο που περιέχει το σημείο z_2.





Β) Αν η άσκηση μας δίνει ότι ο μιγαδικός αριθμός z κινείται σε ένα συγκεκριμένο γεωμετρικό τόπο και μας ζητάει να βρούμε το γεωμετρικό τόπο ενός άλλου μιγαδικού $w=f(z)$, που δίνεται ως συνάρτηση του z, τότε ακολουθούμε τις παρακάτω στρατηγικές:

1. Μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο του w, ή το μέτρο της διαφοράς $w-w_0$, για κατάλληλη επιλογή του w_0. Αν το μέτρο αυτό είναι σταθερό και ίσο με r, τότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο το w_0 και ακτίνα r. Τέτοιες περιπτώσεις είναι οι ασκήσεις όπου μας δίνεται πως ο z ανήκει σε ένα κύκλο ακτίνας ρ, ενώ ο w δίνεται από σχέση της μορφής $w=a\cdot z+b$. Σε τέτοιες περιπτώσεις, συνήθως επιλύουμε τη σχέση ως προς z και στη συνέχεια αντικαθιστούμε στη δοσμένη σχέση. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε $z=\frac{w-b}{a}$, οπότε η σχέση $|z-z_0|=r$, δίνει τη σχέση $\left|\frac{w-b}{a}-z_0\right|=r \Leftrightarrow |w-b-a\cdot z_0|=r\cdot|a|$, οπότε και ο w ανήκει σε κύκλο.

2. Σε πιο πολύπλοκες ασκήσεις, μπορούμε να θέσουμε $z=x+y\cdot i$ και να βρούμε τον γεωμετρικό τόπο που μας δίνεται για τα σημεία z ως μια καμπύλη. Στη συνέχεια θέτουμε $w=x_n+y_n\cdot i$ και

αφού $w=f(z)$, βρίσκουμε τις σχέσεις μεταξύ x,y και x_n, y_n. Αντικαθιστώντας στην αρχική καμπύλη τα x,y από τα x_n, y_n μπορούμε να βρούμε την εξίσωση που ικανοποιούν οι συντεταγμένες x_n, y_n της εικόνας του w στο μιγαδικό επίπεδο. Από τις γνώσεις της Β΄ Λυκείου καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι πρόκειται για ευθεία, έλλειψη, παραβολή, κ.λ.π. Για παράδειγμα: Ξέρουμε ότι ο z κινείται σε κύκλο με κέντρο το Ο και ακτίνα 1. Δηλαδή $|z|=1$. Αυτό σημαίνει ότι $x^2+y^2=1$. Από την άλλη μας δίνεται ότι $w=2z-\bar{z}$. Τότε $w=x+3y\cdot i$, δηλαδή $x_n=x$ και $y_n=3y$. Επομένως $x_n^2+\frac{y_n^2}{9}=1$. Άρα ο w κινείται σε έλλειψη.

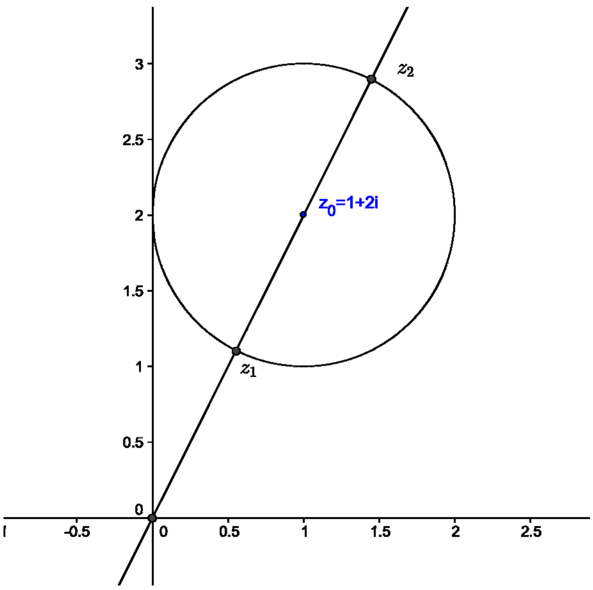
Γ) Σε κάθε άλλη περίπτωση μπορούμε πάντα να θέσουμε $z=x+y\cdot i$ και να εκτελέσουμε πράξεις. Βρίσκουμε την εξίσωση της καμπύλης και από τις γνώσεις της Β΄ Λυκείου καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι πρόκειται για ευθεία, έλλειψη, παραβολή, κ.λ.π.

Δ) Στην περίπτωση που μας ζητείται να βρούμε ποιο από τα σημεία ενός γεωμετρικού τόπου έχει το μικρότερο και το μεγαλύτερο μέτρο, μπορούμε να ακολουθήσουμε τις εξής δύο στρατηγικές:

1. Κάνοντας ένα σχήμα μπορούμε να βρούμε εύκολα (συνήθως) μέσω του σχήματος την απάντηση. Αυτή είναι μια γεωμετρική λύση του προβλήματος. Το σημείο με το μεγαλύτερο μέτρο θα είναι αυτό που βρίσκεται μακρύτερα ως προς την αρχή των αξόνων. Το σημείο με το μικρότερο μέτρο θα είναι αυτό που βρίσκεται πιο κοντά στην αρχή των αξόνων.
2. Χρησιμοποιώντας την **τριγωνική ανισότητα**: $\left||z_1|-|z_2|\right| \le |z_1-z_2| \le |z_1|+|z_2|$, μπορούμε να πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα με αλγεβρικό τρόπο.

Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται το παρακάτω πρόβλημα: Ποιός από τους μιγαδικούς $|z-1-2i|=\sqrt{2}$ έχει το μεγαλύτερο και ποιος το μικρότερο μέτρο; Η γεωμετρική επίλυση του προβλήματος αυτού μας δίνει εύκολα (δες σχήμα) την απάντηση. Εναλλακτικά, ακολουθώντας την αλγεβρική μεθοδολογία παίρνουμε: $|z|=|z-1-2i+1+2i| \le |z-1-2i|+|1+2i|=\sqrt{2}+\sqrt{5}$. Επομένως, το μεγαλύτερο μέτρο των μιγαδικών που ικανοποιούν τη σχέση $|z-1-2i|=\sqrt{2}$ είναι ίσο με $\sqrt{2}+\sqrt{5}$. Αντίστοιχα $|z|=|z-1-2i+1+2i| \ge \left||z-1-2i|-|1+2i|\right|=\left|\sqrt{2}-\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}-\sqrt{2}$. Επομένως, το μικρότερο μέτρο των μιγαδικών που ικανοποιούν τη σχέση $|z-1-2i|=\sqrt{2}$ είναι ίσο με $\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

Το μέγιστο και το ελάχιστο μέτρο εμφανίζονται όταν $z-1-2i=\lambda(1+2i) \Leftrightarrow z=(\lambda+1)+2(1+\lambda)i$. Επειδή υπολογίσαμε το μέτρο του z, μπορούμε να βρούμε την παράμετρο λ.



Ασκήσεις

1. Να βρείτε το μέτρο των μιγαδικών αριθμών:

$$z_1 = 2 - i,\quad z_2 = \frac{3-i}{i} + 1,\quad z_3 = \frac{\left(\sqrt{2} - i\right)^2}{i \cdot \left(i\sqrt{3} + 1\right)^2}$$

2. Αν z_1, z_2, είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$, να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $w = \dfrac{\left(z_1 + z_2^2\right)^{2013}}{\left(2z_1 z_2\right)^{2012}}$.

3. Να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό για τον οποίο ισχύει:

$$|z - i| = |z - 1| = |z + i|.$$

4. Να προσδιοριστεί ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει:

$$|z - 2| = |z + 1| = |z + 2i|.$$

5. Να λυθεί η εξίσωση $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

6. Να λυθεί η εξίσωση $z^2 - 6z - 2|z| + 35 = 0$.

7. Να βρεθεί ο μιγαδικός z αν $|z| = 1$ και $|z - 1| = 2|z + i|$

8. Δείξτε ότι η εξίσωση $\left(1 + i \cdot z\right)^{2013} = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

9. Αν ο ν είναι θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο να ισχύει η εξίσωση

$$\left(1 + i \cdot x\right)^{\nu} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

10. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\left|\frac{z-1}{z+i}\right| = 2.$$

11. Να λυθεί η εξίσωση

$$\left|\frac{z-2}{z-4}\right| = 1$$

12. Να λυθεί η εξίσωση $|\bar{z}| - z = 1 + 2i$.

13. Αν γνωρίζετε ότι ο αριθμός

$$w = \frac{z - i}{z + i}$$

είναι φανταστικός, να δείξετε ότι ο z έχει μέτρο 1.

14. Αν ισχύει η σχέση $|z-9|=3|z-1|$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο διαγράφει κύκλο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, το κέντρο και την ακτίνα του

15. Αν ισχύει ότι $|z-11|=3|z-3|$, να αποδείξετε ότι $|z-2|=3$.

16. Αν ισχύει ότι $z \neq w$, για $z, w \in \mathbb{C}$ και ότι ο αριθμός
$v=\dfrac{i(z+w)}{z-w}$ είναι πραγματικός, να αποδείξετε ότι $|z|=|w|$ και αντιστρόφως.

17. Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $|z+\overline{w}|=|\overline{z}-w|$, τότε δείξτε ότι ο αριθμός $z\overline{w}$ είναι φανταστικός.

18. Αν για τους $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $|z|^2+|w|^2=|z-w|^2$, δείξτε ότι $|z+w|=|z-w|$.

19. Έστω $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ και $z \neq x \cdot i$. Επιπλέον δίνεται και ο αριθμός

$$w=\frac{z+xi}{iz+x}.$$

Α) Να αποδείξετε ότι ο w είναι φανταστικός αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός αριθμός.
Β) Να αποδείξετε ότι $|w|=1$, αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός αριθμός.

20. Αν $z \in \mathbb{C}$, ν φυσικός αριθμός, $v \neq 0$, και $(1+iz)^{v}=(1-iz)^{v}$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

21. Αν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z_1, z_2, \ldots, z_n$, στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται πάνω σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας 1, να αποδείξετε ότι

$$\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots+\frac{1}{z_n}\right|=|z_1+z_2+\cdots+z_n| \leq n.$$

22. Αν $z, w \in \mathbb{C}$, αν αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει

$$x^2-2|z-w|x+\left(1+|z|^2\right)\left(1+|w|^2\right) \geq 0.$$

23. Αν $z, w \in \mathbb{C}$ δείξτε ότι

$$|1-z\overline{w}|-|z-w|^2=\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right).$$

24. Αν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w, στο μιγαδικό επίπεδο είναι εσωτερικά σημεία του κύκλου $x^2+y^2=1$, να αποδείξετε ότι

$$|z-w|<|1-\bar{z}w|.$$

25. Αν $z=x+yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, με $y \neq 0$ και $|z|=1$, δείξτε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε

$$z=\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}.$$

26. Δείξτε ότι ο z είναι πραγματικός αν και μόνο αν $|z-3i|=|z+3i|$.

27. Δείξτε ότι ο z είναι φανταστικός αν και μόνο αν $|z-3|=|z+3|$.

28. Αν $|z| \neq -1$, δείξτε ότι

$|z| = 1$, αν και μόνο αν ο $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός αριθμός.

29. Δίνονται οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w. Να αποδείξετε ότι το πηλίκο z/w είναι φανταστικός αριθμός, αν και μόνο αν $|z+w| = |z-w|$.

30. Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $z \in \mathbb{C}$, με $z \neq -x$. Δείξτε ότι

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-x}{z+x}\right) = \frac{|z|^2 - x^2}{|z+x|^2}.$$

31. Αποδείξτε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει η σχέση

$|z+1| - |z-1| \leq |z+2| - |z|$

32. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, με $z_2 \neq 0$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των αριθμών $w_1 = z_1 + z_2$, $w_2 = z_1 - z_2$ και $w_3 = z_1 + i\sqrt{3}z_2$, στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

33. Αν οι z, w είναι δύο διαφορετικοί μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$v = \dfrac{z+w}{z-w}$ είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $|z| = |w|$.

34. Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z-1| + |z+1| = 4$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

35. Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z-2| = |z+2| + 1$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

36. Έστω ότι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στην καμπύλη με εξίσωση $x^2 + y^2 = 9$ και $w = 5 - 12i$. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z+w|$.

37. Αν ισχύει ότι $|z-2| = 1$ και $|z-1| \leq 1$, να αποδείξετε ότι $1 \leq |z| \leq \sqrt{3}$.

38. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1, z_2, \ldots, z_n$ και w για τους οποίους ισχύει

$\left|\dfrac{z_k - w}{z_k + w}\right| < 1$, για $k = 1,2,...,n$.

Αν θέσουμε $z = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$, να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{z-w}{z+w}\right| < 1$.

39. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z-3|$, όταν $z \in \mathbb{C}$ και $|z+4i| \leq 2$.

40. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει ότι $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) + 3$, να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z|^2 - 8$.