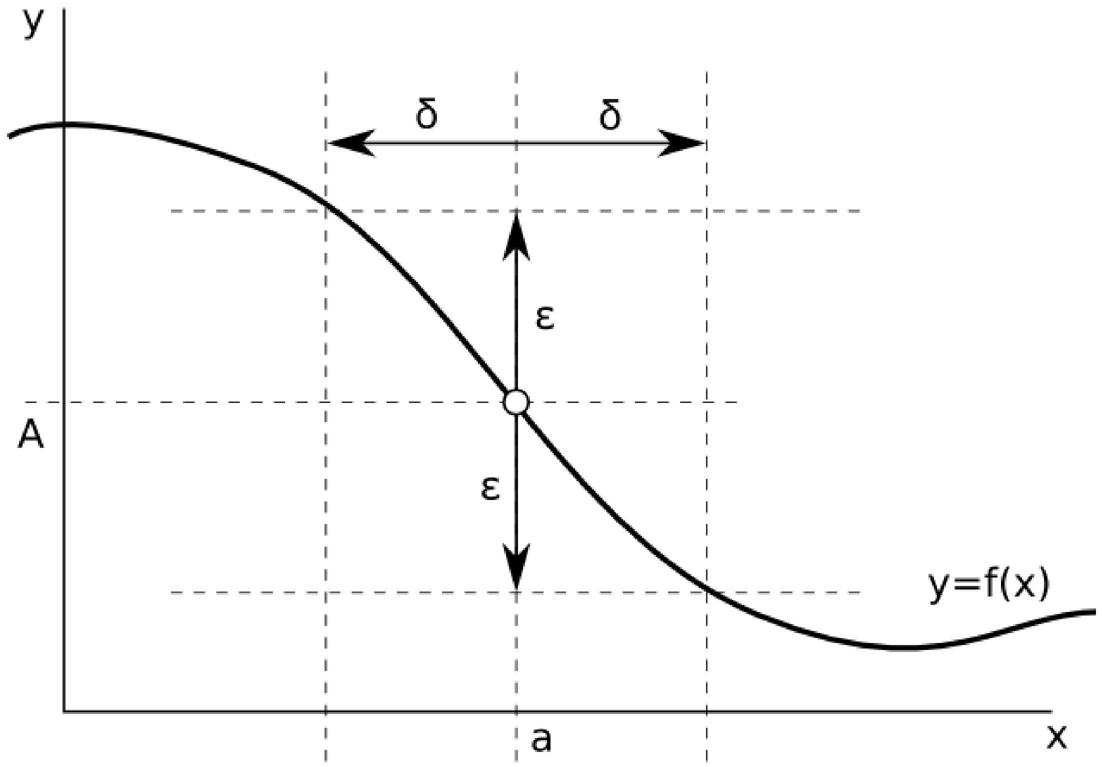
III. Όριο

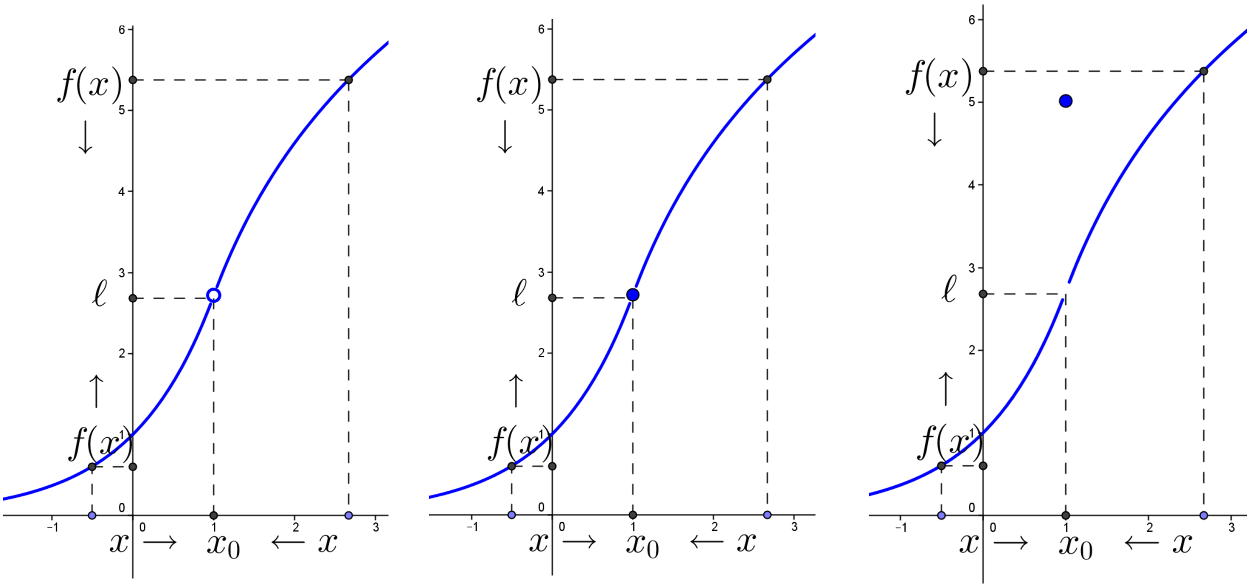


ΜΕΡΟΣ 1
Πεπερασμένο Όριο στο x_0

Α. Ορισμός

Όριο στο x_0: Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε λέμε ότι:
"*το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0, είναι ℓ*", ή πιο απλά, ότι "*το όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ*" και γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

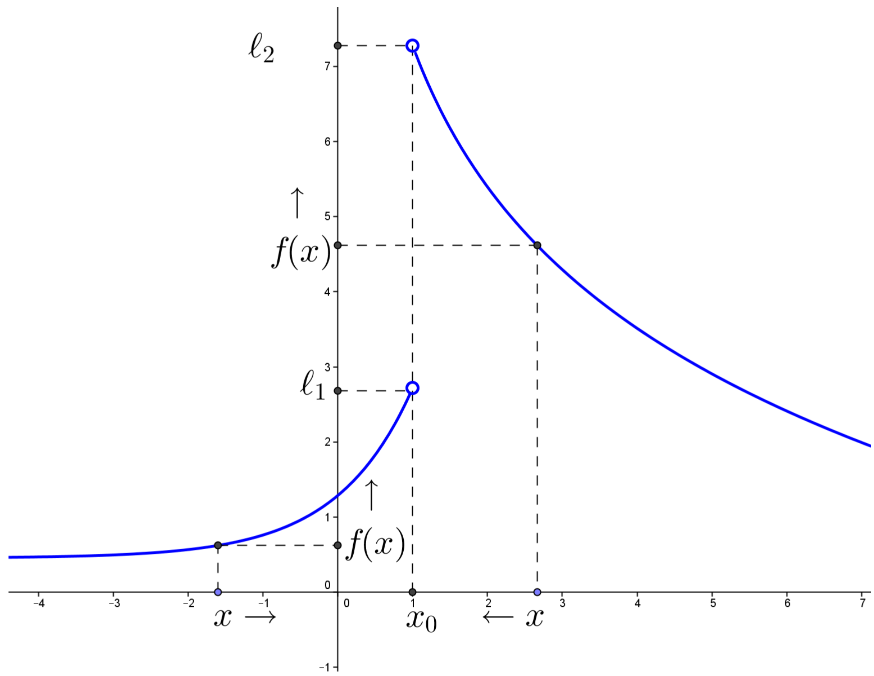
Για να αναζητήσουμε το όριο της $f(x)$ στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε κοντά στο x_0, δηλαδή η f να είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ ή (a,x_0) ή (x_0,b).
Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ή να μην ανήκει σε αυτό (σχήμα 1).
Η τιμή της f στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 ή διαφορετική από αυτό (σχήμα 1).



Σχήμα 1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$. (α) Η f δεν ορίζεται στο x_0. (β) Η f ορίζεται στο x_0 και $f(x_0)=\ell$.
(γ) Η f ορίζεται στο x_0, αλλά $f(x_0)\neq\ell$

Πλευρικά Όρια στο x_0: Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ_1, καθώς το x προσεγγίζει τον αριθμό x_0 από μικρότερες τιμές, τότε λέμε ότι
"*το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά, είναι ℓ_1*", ή, πιο απλά, ότι "*το αριστερό όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ_1*" και γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\ell_1$.

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ_1, καθώς το x προσεγγίζει τον αριθμό x_0 από μεγαλύτερες τιμές, τότε λέμε ότι
"*το όριο της* $f(x)$*, όταν το* x *τείνει στο* x_0 *από τα δεξιά, είναι* ℓ_2", ή, πιο απλά, ότι "*το δεξιό όριο της* $f(x)$ *στο* x_0 *είναι* ℓ_2" και γράφουμε $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_2$.



Σχέδιο 2. Πλευρικά Όρια.

Β. Βασικά Θεωρήματα

Θεώρημα 1.
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, b)$. Τότε, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

(α) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \big(f(x) - \ell\big) = 0$,

(β) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \ell$.

Θεώρημα 2.
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, b)$. Τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, αν και μόνο αν $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

Θεώρημα 3.
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, b)$. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

Θεώρημα 4.
Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες σε ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, b)$, έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) < g(x)$, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x)$.

Θεώρημα 5. (Κριτήριο Παρεμβολής)
Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h, οι οποίες είναι ορισμένες σε ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, b)$. Αν $h(x) \le f(x) \le g(x)$, για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Γ. Βασικές Ιδιότητες

1. όριο σταθερής συνάρτησης: $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$, για κάθε $c \in R$.

2. Όριο ταυτοτικής Συνάρτησης: $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

3. Όριο αθροίσματος: Αν υπάρχουν τα όρια των f, g στο x_0, τότε ισχύει ότι $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$.

4. Όριο βαθμωτού γινομένου: Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε ισχύει ότι $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\big(\lambda \cdot f(x)\big) = \lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, για κάθε $\lambda \in R$.

5. Όριο γινομένου: Αν υπάρχουν τα όρια των f, g στο x_0, τότε ισχύει ότι $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$.

6. Όριο πηλίκου: Αν υπάρχουν τα όρια των f, g στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, τότε ισχύει ότι $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}}$.

7. Όριο απόλυτης τιμής: Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε ισχύει ότι $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|}$,

8. Όριο ρίζας: Αν η f είναι θετική κοντά στο x_0 και υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}}$, για κάθε φυσικό αριθμό k.

Τριγωνομετρικά Όρια

1. Ισχύει $\left|\eta\mu(x)\right| \leq |x|$ για κάθε $x \in R$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} \eta\mu(x) = \eta\mu(x_0)$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu(x) = \sigma\upsilon\nu(x_0)$
4. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(x)}{x} = 1}$
5. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(x)-1}{x} = 0}$

Όριο Σύνθετης Συνάρτησης $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))$

- Θέτουμε $u = g(x)$
- Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το όριο $u_0 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- Τέλος, υπολογίζουμε το όριο $\ell = \lim\limits_{u\to u_0} f(u)$. Ισχύει δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{u\to u_0} f(u)$ (αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0.

Δ. Μεθοδολογία Ασκήσεων.

1. Υπολογισμός απλών ορίων

Στην περίπτωση απλών ή σύνθετων παραστάσεων, στις οποίες δεν υπάρχουν απόλυτες τιμές, αλλά ούτε και κάποιος παρονομαστής που να μηδενίζεται, απλώς αντικαθιστούμε το x με την τιμή x_0 (την τιμή στην οποία τείνει το x) και υπολογίζουμε το όριο.

Παραδείγματα: Άσκηση 1Α, 2Α σχολικού βιβλίου σελ. 174-176.

2. Όρια δύκλαδων συναρτήσεων ή συναρτήσεων με απόλυτες τιμές

Αντικαθιστούμε το x με την τιμή x_0, όπως στην πρώτη περίπτωση. Αν οι παραστάσεις μέσα στα απόλυτα είναι θετικές ή αρνητικές υπολογίζουμε το όριο με αυτή την απλή αντικατάσταση. Στην περίπτωση που κάποια από τις παραστάσεις αυτές πάρει την τιμή 0 (και προκύπτει κάποιου είδους απροσδιοριστία), τότε βγάζουμε το απόλυτο χρησιμοποιώντας τη γνωστή (από την Α΄ Λυκείου) σχέση:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}.$$

Με αυτό τον τρόπο βγάζουμε την απόλυτη τιμή και οδηγούμαστε σε μια δύκλαδη συνάρτηση, της οποίας υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια.

Παραδείγματα: Άσκηση 5Α, 2Β σχολικού βιβλίου σελ. 174-176.

3. Υπολογισμός ορίου ρητών παραστάσεων που εμφανίζουν την απροσδιόριστη μορφή 0/0.

Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή (οι οποίοι έχουν ως ρίζα το x_0) και διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το x με την τιμή x_0 και υπολογίζουμε το όριο.

Παραδείγματα: Άσκηση 3Α, 1Β, 2Β βιβλίου σελ. 174-176.

4. Υπολογισμός ορίου ρητών παραστάσεων με ρίζες, οι οποίες εμφανίζουν την απροσδιόριστη μορφή 0/0.

Ακολουθούμε μια από τις παρακάτω μεθοδολογίες.

Α) Πολλαπλασιάζουμε με τις συζυγείς παραστάσεις των παραγόντων, οι οποίοι έχουν ρίζες, τον αριθμητή και παρονομαστή. Κάνουμε τις πράξεις (διαφορά τετραγώνων, κ.λ.π.) και διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες που προκύπτουν. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το x με την τιμή x_0 και υπολογίζουμε το όριο.

Β) Αν εμφανίζονται ριζικά μεγαλύτερης τάξης (π.χ. $\sqrt[3]{x-2}$), τότε αντί για πολλαπλασιασμό με τη συζυγή παράσταση, πολλαπλασιάζουμε με τον κατάλληλο παράγοντα ώστε να σχηματιστεί η ταυτότητα

$$x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right).$$

Για παράδειγμα, αν εμφανίζεται παράγοντας της μορφής $1-\sqrt[3]{x-1}$, πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση $1+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$. Έτσι παίρνουμε

$$\left(1-\sqrt[3]{x-1}\right)\left(1+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}\right) = 1-(x-1) = -x.$$

Γ) Αν εμφανίζονται ριζικά με ίδιο υπόριζο (π.χ. $\sqrt{x+1}$, $\sqrt[3]{x+1}$), τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε με u το ριζικό με δείκτη τον ΕΚΠ των δεικτών που εμφανίζονται στις ρίζες. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα $u=\sqrt[6]{x+1}$, οπότε $\sqrt{x+1}=u^3$ και $\sqrt[3]{u+1}=u^2$. Στη συνέχεια, μπορούμε να εφαρμόσουμε τις ιδιότητες ορίων σύνθετων συναρτήσεων.

Δ) Στην περίπτωση όπου εμφανίζονται διαφορετικές ρίζες (π.χ. .$\sqrt{x+1}$, $\sqrt[3]{x+2}$), τότε μπορούμε να σπάσουμε το κλάσμα στα δύο, βάζοντας στο ένα τη μία ρίζα και στο άλλο την άλλη, προσέχοντας όμως να έχουμε απροσδιοριστία και στα δύο κλάσματα. Δουλεύουμε το κάθε ένα ξεχωριστά.

Π.χ. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}+\sqrt[3]{x-1}-4}{x-2}$, τότε παίρνουμε $\dfrac{\sqrt{x+7}+\sqrt[3]{x-1}-4}{x-2}=\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}+\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-1}{x-2}$ και υπολογίζουμε τα δύο όρια ξεχωριστά.

Παραδείγματα: Άσκηση 4Α, 2Βiii βιβλίου σελ. 174-176.

5. Υπολογισμός ορίου τριγωνομετρικών παραστάσεων, οι οποίες εμφανίζουν την απροσδιόριστη μορφή 0/0.

Ακολουθούμε μια από τις παρακάτω μεθοδολογίες:

Α) Γενικά προσπαθούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις σχέσεις των τριγωνομετρικών ορίων. Για το σκοπό αυτό μπορεί να χρειαστεί να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμητή ή τον παρονομαστή.

Π.χ. αν μας ζητείται το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\eta\mu(a\cdot x)}{x}$, τότε έχουμε $\dfrac{\eta\mu(a\cdot x)}{x}=\dfrac{a\cdot\eta\mu(a\cdot x)}{a\cdot x}$ και ακολουθούμε τους κανόνες του ορίου σύνθετης συνάρτησης.

Β) Αν έχουμε παράσταση με ρίζα, τότε ακολουθούμε τη διαδικασία που περιγράφεται στην κατηγορία 4 και στη συνέχεια προσπαθούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις των τριγωνομετρικών ορίων.

Δεν ξεχνάμε τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα: $\eta\mu^2(x)+\sigma\upsilon\nu^2(x)=1$.

Γ) Αν εμφανίζεται σε ένα κλάσμα η παράσταση $1-\sigma\upsilon\nu(x)$, ή η παράσταση $1+\sigma\upsilon\nu(x)$, τότε μια καλή ιδέα είναι να πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση.

Δ) Πολλά όρια που περιέχουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις λύνονται με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής. Γι αυτό το λόγο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ανισώτητες

1. $-1\le\eta\mu x\le 1$, $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1$
2. $-x\le\eta\mu x\le x$

Παραδείγματα: Άσκηση 6Α, 7Α βιβλίου σελ. 174-176.

6. Υπολογισμός ορίου συνάρτησης, αν δίνονται συγκεκριμένες ανισότητες.

Σε τέτοιες ασκήσεις χρησιμοποιούμε το κριτήριο παρεμβολής. Βρίσκουμε τα όρια των παραστάσεων που φράζουν άνω και κάτω τη δοσμένη συνάρτηση. Αν αυτά τα όρια ταυτίζονται, τότε το κοινό όριο είναι και όριο τη δοσμένης συνάρτησης.

Παραδείγματα: Άσκηση 9Α, βιβλίου σελ. 174-176.

7. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να υπολογίσουμε το όριο μιας συνάρτησης *f(x)*, όταν δίνεται το όριο μιας παράστασης Π(*f(x)*) (η οποία περιέχει την *f(x)*).

Θέτουμε $g(x)=\Pi(f(x))$ και λύνουμε ως προς $f(x)$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τους γνωστούς κανόνες των ορίων.

Παραδείγματα: Άσκηση 4Β, βιβλίου σελ. 174-176.

Σημείωση 1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$ τότε ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$. Η απόδειξη μπορεί να γίνει με κριτήριο παρεμβολής, χρησιμοποιώντας την ανίσωση $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\ell$, $\ell>0$, τότε είτε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, είτε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\ell$, είτε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Σημείωση 2. Όπως θα δούμε παρακάτω, πολλά από τα όρια που εμφανίζουν απροσδιοριστία της μορφής 0/0 μπορούν να υπολογιστούν ευκολότερα με τη βοήθεια του **κανόνα L' Hospital**:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα όρια

Α) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+4x-4}{x^3+8}$, Β) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-5x+6}$, Γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$

2. Να υπολογιστούν τα όρια (αν υπάρχουν).

Α) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{|x-5|+x^2-4x-5}{x^2-25}$, Β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{|x|-1}$, Γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1+|x-1|}{x^2-1}$, Δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|+|x-2|}{x}$

3. Να υπολογιστούν τα όρια

Α) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-49}$, Β) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4}$ Γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x}-1}$, Δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

4. Να υπολογιστούν τα όρια

Α) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^2-100}{x\cdot\sqrt{10}-10\cdot\sqrt{x}}$, **Β)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}$

5. Να υπολογιστούν τα όρια

Α) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{2x+2}-\sqrt[3]{x+5}}{x-3}$, **Β)** $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{1+x}-3}{2-\sqrt[3]{x}}$, **Γ)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{2x+4}+\sqrt{3x-2}-4}{x-2}$, **Δ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$

6. Να υπολογιστούν τα όρια

Α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 4x}{3x}$, Β) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{x}}$, Γ) $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\dfrac{\eta\mu(3x-2)}{9x^2-4}$

7. Να υπολογιστούν τα όρια

Α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{1-\sqrt{1+x}}$, Β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 7x-\eta\mu 2x}{3x}$, Γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\eta\mu x}{\varepsilon\varphi x-2x}$, Δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 2x}$

Ε) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left[(\pi-2x)\cdot\varepsilon\varphi x\right]$

8. Να υπολογιστούν τα όρια

Α) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\eta\mu^2(x)+\eta\mu(x)-1}{2\eta\mu^2(x)-3\eta\mu(x)+1}$, Β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(x)-1}{x^2+\eta\mu^2(x)}$, Γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{\eta\mu(x-1)}$

9. Αν γνωρίζετε ότι

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x^2-3x+2}=1,$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ και να το υπολογίσετε.

10. Αν γνωρίζετε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\big(f(x)+g(x)\big)=1$ και ότι $\lim\limits_{x\to 1}\big(f(x)-2g(x)\big)=-1$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1}g(x)$ και να τα υπολογίσετε.

11. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} -2\eta\mu(x), & x\le -\dfrac{\pi}{2} \\ \alpha\eta\mu(x)+\beta, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu(x), & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Αν γνωρίζετε ότι υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x)$, να υπολογίσετε τις παραμέτρους α, β.

12. Δίνεται μια πραγματική συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, για κάποιο $x_0\in D_f$. Να αποδείξετε ότι

Α) Αν η συνάρτηση είναι άρτια, τότε $\lim\limits_{x\to -x_0} f(x)=\ell$.

Β) Αν η συνάρτηση είναι περιττή, τότε $\lim\limits_{x\to -x_0} f(x)=-\ell$.

13. Δίνεται η συνάρτηση *f*, για την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε $x,y\in D_f$. Γνωρίζουμε ότι $0\in D_f$, $f(0)\neq 0$ και $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Να αποδείξετε ότι

Α) $f(0)=1$

Β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, για κάθε $x_0\in D_f$.

14. Δίνεται η συνάρτηση *f*, για την οποία ισχύει $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in D_f$. Γνωρίζουμε ότι $1\in D_f$ και $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$. Να αποδείξετε ότι

Α) $f(1)=0$

Β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, για κάθε $x_0\in D_f$.

15. Αν γνωρίζετε ότι

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-\ell}{f(x)+\ell}=0$, να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, $\ell\in R$.

16. Αν για κάθε $x\in R$, ισχύει $\eta\mu(3x)-x|x|\le f(x)\le 3x+x|x|$, να βρεθούν

Α) το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και

Β) το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

17. Αν για τις πραγματικές συναρτήσεις f,g, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f^2(x)+g^2(x)\right)=0$, να υπολογίσετε τα όρια:

Α) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Β) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

Γ) Αν $f^2(x)+g^2(x)\le 2\eta\mu(x)f(x)$, για κάθε $x\in R$, να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.

18. Αν για κάθε $x\in R$, ισχύει $3\left(x^2-4\right)\le f(x)\le x^3-8$, να βρεθούν

Α) το $f(2)$,

Β) το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$,

Γ) το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ και

Δ) το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{\eta\mu(x-2)}$

19. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, έτσι ώστε η συνάρτηση να ορίζεται κοντά στο 1. Αν γνωρίζετε το όριο

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\ell$,

Να αποδείξετε ότι

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-xf(1)}{x\left(x^2-1\right)}=\dfrac{\ell-f(1)}{2}$.

20. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(-1,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $(1,+\infty)$. Η συνάρτηση ικανοποιεί τη συνθήκη

$f^2(x)-3f(x)+3=\dfrac{x+2}{f(x)}$, για κάθε $x>0$.

Α) Δείξτε ότι $f^2(x)-f(x)+1>1$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$.

Β) Βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1^+} f^{-1}(x)$.

Γ) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

21. Αν για τη συνάρτηση $f:R\to R^*$ (με σύνολο τιμών το R^*) ισχύει η σχέση

$f(x+y)=f(x)f(y)+xy$, για κάθε $x,y\in R$ και

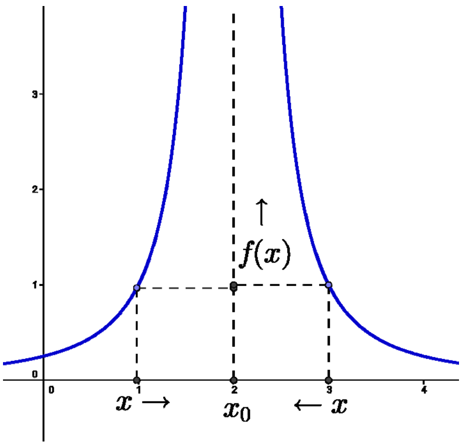
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2f(x)-f(1)}{x-1}=7$,

Να υπολογίσετε το $f(2)$.

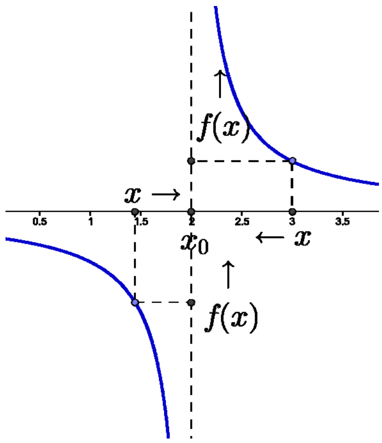
ΜΕΡΟΣ 2
Μη πεπερασμένο Όριο στο x_0 - Όριο στο Άπειρο

Α. Μη πεπερασμένο όριο

Πολύ συχνά, καθώς το x κινείται προς το x_0 παρατηρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης μεγαλώνουν ή μικραίνουν απεριόριστα (σχήμα 1). Σε αυτή την περίπτωση, λέμε ότι η συνάρτηση έχει στο x_0 όριο το $+\infty$ ή το $-\infty$ αντίστοιχα.



(α)



(β)

Σχήμα 1. (α) Η συνάρτηση έχει στο x_0 όριο το $+\infty$. (β) Δεν ορίζεται το όριο της συνάρτησης στο x_0.

Βασικές ιδιότητες

- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}\left(-f(x)\right) = -\infty$.
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}\left(-f(x)\right) = +\infty$.
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0$.
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = +\infty$.
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = -\infty$.
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}\left|f(x)\right| = +\infty$.
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)} = +\infty$.

Σύμφωνα με τις ιδιότητες αυτές μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu}}=+\infty}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty}$.

Β. Όριο στο άπειρο

Καθώς το x αυξάνεται (ή μειώνεται) απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, μπορεί να συμβούν τα εξής:

- Το $f(x)$ προσεγγίζει όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το ℓ και γράφουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.
- Το $f(x)$ μειώνεται απεριόριστα. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το $-\infty$ και γράφουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.
- Το $f(x)$ αυξάνεται απεριόριστα. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το $+\infty$ και γράφουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Βασικά όρια

- $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\nu}=+\infty}$ και $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\nu}}=0}$
- $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2\nu}=+\infty}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2\nu+1}=-\infty}$ και $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{\nu}}=0}$
- $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} a^{x}=+\infty}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} a^{x}=0}$, για $a>1$.
- $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} a^{x}=0}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} a^{x}=+\infty}$, για $0<a<1$.
- $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x=+\infty}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x=-\infty}$, για $a>1$.
- $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x=-\infty}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x=+\infty}$, για $0<a<1$.

- **Όριο Πολυωνυμικής συνάρτησης** $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$.

  $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(a_nx^n)}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(a_nx^n)}$

- **Όριο Ρητής συνάρτησης** $f(x)=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}$

  $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\right)}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\right)}$

Πράξεις με το ∞.

Οι πράξεις με άπειρα όρια γίνονται με βάση την κοινή λογική.

$(+\infty)\cdot(+\infty)$	$=+\infty$
$(+\infty)\cdot(-\infty)$	$=-\infty$
$(-\infty)\cdot(-\infty)$	$=+\infty$
$\lambda\cdot(+\infty)$	$=+\infty$ (αν $\lambda>0$)
$\lambda\cdot(+\infty)$	$=-\infty$ (αν $\lambda<0$)
$(+\infty)+(+\infty)$	$=+\infty$
$(-\infty)+(-\infty)$	$=-\infty$
$\lambda+(+\infty)$	$=+\infty$
$\lambda+(-\infty)$	$=-\infty$
$\dfrac{1}{\pm\infty}$	$=0$
$\dfrac{1}{0^+}$	$=+\infty$
$\dfrac{1}{0^-}$	$=-\infty$

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

$$\frac{0}{0},\ 0\cdot(\pm\infty),\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ (+\infty)-(+\infty),\ (-\infty)-(-\infty),\ (+\infty)+(-\infty)$$

Γ. Μεθοδολογία Ασκήσεων.

1. Υπολογισμός απλών ορίων

Στην περίπτωση όπου το όριο της δοσμένης παράσταση μπορεί να υπολογισθεί άμεσα χρησιμοποιώντας τους κανόνες που αναφέρθηκαν, το έργο μας είναι εύκολο. Πολλές φορές οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων μας προσφέρουν εύκολα το όριο που αναζητούμε. Αν έχουμε απόλυτα τότε πέρνουμε περιπτώσεις και τα αφαιρούμε σύμφωνα με τον κανόνα

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}.$$

Παραδείγματα

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^6} = +\infty$, το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^5}$ δεν υπάρχει, $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x^6} = 0$, κ.λ.π.

2. Όριο ρητών συναρτήσεων στο x_0 που καταλήγουν στην μορφή θ/0, θ>0

Στην περίπτωση αυτή εξετάζουμε το πρόσημο του παρονομαστή κοντά στο x_0. Αν ο παρονομαστής είναι θετικός για κάθε x γύρω από μια περιοχή του x_0, τότε το όριο είναι $+\infty$, ενώ αν είναι αρνητικός το όριο είναι το $-\infty$. Όμως, στην περίπτωση που ο παρονομαστής δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο γύρω από το x_0, τότε το όριο δεν υπάρχει (παρότι υπάρχουν τα πλευρικά όρια).

Παραδείγματα:

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-1}{(x-1)^2}\left(=\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$, το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-1}{(x-1)^3}$ δεν υπάρχει αφού $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x-1}{(x-1)^3}\left(=\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$, ενώ $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x-1}{(x-1)^3}\left(=\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$.

Αν η παράσταση είναι άθροισμα ρητών με παρονομαστές που μηδενίζονται, τότε κάνουμε ομώνυμα για να έχουμε μια μόνο ρητή παράσταση.

Παραδείγματα: Ασκήσεις 1Α, 2Α, 1Β σελ 181-182

3. Όριο ρητών συναρτήσεων στο άπειρο

Στην περίπτωση αυτή ακολουθούμε τους κανόνες των ορίων ρητής συνάρτησης, δηλαδή:

Αν $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$

Τότε $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\right)}$ και $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\right)}$

Αν η παράσταση είναι άθροισμα ρητών, τότε κάνουμε ομώνυμα για να έχουμε μια μόνο ρητή παράσταση.

Παραδείγματα: 1Α, 4Β σελ 186-187.

4. Όριο στο άπειρο διαφοράς ριζών που καταλήγουν στην απροσδιόριστη μορφή ∞ - ∞

Πολλαπλασιάζουμε με τη συζυγή παράσταση αριθμητή και παρονομαστή, κάνουμε τη διαφορά τετραγώνων και εκτελούμε τις πράξεις μέχρι να εξαλειφθεί η απροσδιοριστία.

5. Όριο στο άπειρο ρητής συνάρτησης με εκθετικές

Επιλέγουμε τη μεγαλύτερη βάση, έστω α, και διαιρούμε όλους τους όρους στον αριθμητή και στον παρονομαστή με το a^x.

Παράδειγμα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+10^x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{e^x}{10^x}+\dfrac{10^x}{10^x}}{\dfrac{e^x}{10^x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\dfrac{e}{10}\right)^x+1}{\left(\dfrac{e}{10}\right)^x}=\left(\dfrac{0^+ +1}{0^+}\right)=1$.

6. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να υπολογίσουμε το όριο μιας συνάρτησης *f(x)*, όταν δίνεται το όριο μιας παράστασης Π(*f(x)*) (η οποία περιέχει την *f(x)*).

Θέτουμε $g(x)=\Pi(f(x))$ και λύνουμε ως προς $f(x)$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τους γνωστούς κανόνες των ορίων.

Παραδείγματα 4Β, σελ 181-182.

7. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να υπολογίσουμε την τιμή μιας παραμέτρου έτσι ώστε να υπάρχει το όριο (ή να είναι ίσο με μια συγκεκριμένη τιμή).

Αν έχουμε ένα πηλίκο της μορφής $\dfrac{f(\lambda)}{0}$, τότε για να υπάρχει το όριο θα πρέπει $f(\lambda)=0$. Υπολογίζουμε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η συνθήκη και ελέγχουμε αν όντως υπάρχει το όριο.
Αν έχουμε απροσδιόριστη μορφή $+\infty-\lambda\cdot(+\infty)$, τότε ακολουθούμε τη μεθοδολογία της κατηγορίας 4 και εξετάζουμε για ποια τιμή του λ υπάρχει το όριο.
Όμοια δουλεύουμε σε όλες τις άλλες περιπτώσεις.

Παραδείγματα: 3Β, σελ 182, 2Β, 3Β σελ 187

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}+\varepsilon\varphi^2 x}{\eta\mu^2 x+\varepsilon\varphi^2 x}$, β) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\eta\mu^2 x}{x-\pi}$, γ) $\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu\big(\eta\mu(\eta\mu 2x)\big)$

2. Δίνεται η συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(x)\le\dfrac{\sqrt{2x}-2}{(x-2)^2}$ για κάθε $x\in(1,2)$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$.

3. Να υπολογιστούν τα όρια:

α). $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1+2^x+3^3}{1+5^x+e^x}$, β) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2^x+3^{x+1}}{2^{x+1}+3^x}$, γ) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2^{x+1}-3^x}{2^x+3^{x+1}}$, δ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\alpha^{x+1}+2^{x+2}}{\alpha^{x+2}+2^{x+1}}$

4. Αν $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^3+x-2}(\eta\mu x-2)$ και $g(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu 4x}{\sqrt{x^2+\eta\mu^2 x}}$, να δειχτεί, ότι $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}g(x)=0$.

5. Αν $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{\varepsilon\varphi x}=2$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2 g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=2$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\cdot g(x)$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+f(x)=x^3$ με $x\in(0,+\infty)$

α) Να αποδείξετε, ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$

β) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

7. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(\mu-1)x^4+(\kappa-2)x^3-4}{(\kappa-1)x^2+3}$ $\mu,\kappa\in R$.

8. Να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια

α). $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$, β) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$, γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$

9. Να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια

α). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{(x-2)^2}$, β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-4}{x^2+2x^3}$, γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{(x-2)^2}$

10. Να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια

α). $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{3x-5}-2}$, β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

11. Να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια

α). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{2x}-2}$, β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-4x+4}$

12. Να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια:

α). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$, β) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2}{\sqrt[3]{x+9}-2}$ γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}}$

13. Να βρεθεί ο $\alpha \in R$ έτσι ώστε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-\alpha x+2}{x-2}$ να είναι πραγματικός αριθμός.

14. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-\alpha}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in R$

15. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in R$

16. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

α). $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^5-2x+2)$, β) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^4-3x+1)$ γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+2x+1)$

δ). $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3-x^2+1}{x^3+2}$, ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^5+2x+3}$, στ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4+x^2-2x}{x^5+1}$

ζ). $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+2x+3}{3x^3+1}$, η) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+3x}{x^3+2x^2+1}$, θ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-7x^3+2x-6}{x^2-1}$

17. Να βρεθούν τα όρια:

α). $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+2}$, β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3x+2}$

18. Να βρεθούν τα όρια:

α). $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-2x\right)$, β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

19. Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$, β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+1}-x}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+2x+\beta}{(\alpha+1)x-\beta}$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ αν $\beta>0$ και $\alpha\in R$.

21. Αν $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}-\alpha x+\beta$, να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in R$ έτσι ώστε, να ισχύει:

α). $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, β) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x(x+\alpha)}-x,\quad \alpha\in R$. Να βρεθούν τα όρια:

α). $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, β) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

23. Να βρεθούν τα όρια:

α). $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu 2x}{x+1}$, β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\eta\mu 3x-\sigma\upsilon\nu^2 2x}{x^2-1}$, γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\eta\mu x$