ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΟΥ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f

1. Με κατάλληλη μετατροπή της συναρτησιακής σχέσης (δίνοντας τις κατάλληλες τιμές ή κάνοντας τις κατάλληλες αντικαταστάσεις).

Άσκηση 1.1.

f: (0,+∞) → R $f\left(\frac{x}{e}\right) \le \ln x \le f(x) - 1\ ,\ x > 0$	Να βρεθεί ο τύπος της f.

$$f\left(\frac{x}{e}\right) \le \ln x \le f(x) - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(\frac{x}{e}\right) \le \ln x & (1) \\ \kappa\alpha\iota & \\ \ln x \le f(x) - 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \overset{\acute{o}\pi o\upsilon\ x\ \tau o\ ex}{\Rightarrow} f\left(\frac{ex}{e}\right) \le \ln(\mathrm{e}x) \Leftrightarrow f(x) \le 1 + \ln x \quad (3)$$

$$(2) \Leftrightarrow f(x) \ge 1 + \ln x \quad (4)$$

$$(3),(4) \Rightarrow f(x) = 1 + \ln x \quad , x > 0$$

Η συνάρτηση αυτή επαληθεύει τη δοσμένη συνθήκη, επομένως είναι η ζητούμενη.

Άσκηση 1.2.

f: R → R $f(x-2)+2f(3-x)=11-2x \quad ,x\in R$	Να βρεθεί ο τύπος της f.

$$f(x-2)+2f(3-x)=11-2x \qquad (1)$$

$$(1)\overset{\text{για } x \text{ το } x+2}{\Rightarrow} f(x+2-2)+2f(3-x-2)=11-2(x+2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)+2f(1-x)=7-2x \qquad (2)$$

$$(2)\overset{\text{για } x \text{ το } 1-x}{\Rightarrow} f(1-x)+2f(1-1+x)=7-2(1-x)$$

$$\Leftrightarrow f(1-x)+2f(x)=5+2x \qquad (3)$$

$$\begin{matrix}(2): & f(x)+2f(1-x)=7-2x \\ (3): & 2f(x)+f(1-x)=5+2x\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+2f(1-x)=7-2x \\ -4f(x)-2f(1-x)=-10-4x \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow -3f(x)=-6x-3 \Leftrightarrow f(x)=2x+1$$

Άσκηση 1.3.

f: R → R $f(x^2-y^2)=(x-y)(f(x)+f(y)) \quad , \ x\in R$ f(1) = 2	i. Να αποδείξετε ότι f περιττή. ii. Να βρεθεί ο τύπος της f

i. *Θέτω x = y = 0* → f(0) = 0
Θέτω y = -x → 2x(f(x)+f(-x)) = 0 → f(-x) = -f(x) για x≠0 →f περιττή

ii. $f(x^2-y^2)=(x-y)(f(x)+f(y)) \qquad (1)$
Θέτω όπου y το –y → $f(x^2-y^2)=(x+y)(f(x)-f(y)) \qquad (2)$
Από (1) , (2) → yf(x)=xf(y) (3)
Στη σχέση (3) όπου x = 1 → f(x) = 2x ,x$\in R$

2. Με την βοήθεια του ορισμού της συνέχειας σε σημείο.

Άσκηση 2.1.	
f: R → R , συνεχής $x^2 f(x) + \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{x^2+9} - 2 \qquad , x \in R$	Να βρεθεί ο τύπος της f.

Για x≠0 , $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+9} - 2 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

f συνεχής στο 0 →

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9} - 2 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2+9} - 3}{x^2} + \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right) \overset{**}{=} \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9} - 3}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{x^2+9} - 3\right)\left(\sqrt{x^2+9} + 3\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+9} + 3\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+9} + 3\right)} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)}{x^2(1 + \sigma\upsilon\nu x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2(1 + \sigma\upsilon\nu x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu^2 x}{x^2(1 + \sigma\upsilon\nu x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \sigma\upsilon\nu x}\right] = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Επομένως: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+9} - 2 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2} & , x \neq 0 \\ \dfrac{2}{3} & , x = 0 \end{cases}$

3. f συνεχής & διατηρεί πρόσημο.

Άσκηση 3.1.	
f: A → R , συνεχής $f^2(x) = 9 - x^2$, x∈A	α. Πεδίο ορισμού A = ; β. Ρίζες της f(x) = 0 γ. Ν.δ.ο. η f διατηρεί πρόσημο στο (-3,3) δ. Να βρεθεί ο τύπος της f

α. $f^2(x) \geq 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-3,3]$

β. $f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \ \text{ή} \ x = -3$

γ. $\left.\begin{matrix} f \ \text{συνεχής στο} \ (-3,3) \\ f(x) \neq 0 \ , x \in (-3,3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \eta \ f \ \text{διατηρεί σταθερό πρόσημο στο} (-3,3)$

δ.

Η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-3,3) \Rightarrow$

$f(x) > 0 \ , x \in (-3,3) \ \text{ή} \ f(x) < 0 \ , x \in (-3,3)$

$f^2(x) = 9 - x^2 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{9 - x^2} \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{9 - x^2}$

* Αν $f(x) > 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{9 - x^2} \ , x \in (-3,3)$

* Αν $f(x) < 0 \Rightarrow -f(x) = \sqrt{9 - x^2} \Leftrightarrow f(x) = -\sqrt{9 - x^2} \ , x \in (-3,3)$

$$f(-3) = f(3) = 0 \ , \text{επομένως} : \begin{cases} f(x) = \sqrt{9 - x^2} \ , x \in [-3,3] \\ \text{ή} \\ f(x) = -\sqrt{9 - x^2} \ , x \in [-3,3] \end{cases}$$

Άσκηση 3.2.	
f: R → R , συνεχής $f^2(x) = 2e^x f(x)$, x∈R	Να βρεθεί ο τύπος της f

$f^2(x) = 2e^x f(x) \Leftrightarrow f^2(x) - 2e^x f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$f^2(x) - 2e^x f(x) + e^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow (f(x) - e^x)^2 = e^{2x}$

Έστω $g(x) = f(x) - e^x$

Επομένως $(g(x))^2 = e^{2x} \Leftrightarrow |g(x)| = e^x$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow |g(x)| = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \ (\text{αδύνατη}) \Rightarrow g(x) \neq 0 \ , x \in R$

g συνεχής $\Rightarrow$ Η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.

* Αν $g(x) > 0 \Rightarrow g(x) = e^x \Leftrightarrow f(x) - e^x = e^x \Leftrightarrow f(x) = 2e^x \ , x \in R$

* Αν $g(x) < 0 \Rightarrow g(x) = -e^x \Leftrightarrow f(x) - e^x = -e^x \Leftrightarrow f(x) = 0 \ , x \in R$

Άσκηση 3.3.	
f: R → R , συνεχής $\left(f(x)+1\right)\left(f(x)-1\right)=x^2-2x$, x∈R	Να βρεθεί ο τύπος της f

$$\left(f(x)+1\right)\left(f(x)-1\right)=x^2-2x \Leftrightarrow f^2(x)-1=x^2-2x \Leftrightarrow$$
$$f^2(x)=x^2-2x+1 \Leftrightarrow f^2(x)=(x-1)^2 \Leftrightarrow \left|f(x)\right|=\left|x-1\right| \quad ,x\in R$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$$
$$f \ \textit{συνεχής} \Rightarrow \text{Η } f \ \textit{διατηρεί σταθερό πρόσημο στα} \ (-\infty,1) \ \textit{και} \ (1,+\infty)$$

Περιπτώσεις:

x	-∞		1		+∞
f(x)		+	0	+	
f(x)		-	0	-	
f(x)		+	0	-	
f(x)		-	0	+	

Α.
$f(x)>0 \ , \ x\neq 1$
$$\left|f(x)\right|=\left|x-1\right| \Rightarrow f(x)=\left|x-1\right| \ ,x\in R \qquad \left(f(1)=0\right)$$

Β.
$f(x)<0 \ , \ x\neq 1$
$$\left|f(x)\right|=\left|x-1\right| \Rightarrow f(x)=-\left|x-1\right| \ ,x\in R \qquad \left(f(1)=0\right)$$

Γ.
$f(x)>0 \ \text{για} \ x<1 \ \text{ή} \ f(x)<0 \ \text{για} \ x>1$
$$\left|f(x)\right|=\left|x-1\right| \Rightarrow \begin{cases} f(x)=-x+1 & ,x<1 \\ \text{ή} & \\ -f(x)=x-1 & ,x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=-x+1 & ,x<1 \\ \text{ή} & \\ f(x)=-x+1 & ,x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=-x+1 \ ,x\in R$$

Δ.
$f(x)<0 \ \text{για} \ x<1 \ \text{ή} \ f(x)>0 \ \text{για} \ x>1$
$$\left|f(x)\right|=\left|x-1\right| \Rightarrow \begin{cases} -f(x)=-x+1 & ,x<1 \\ \text{ή} & \\ f(x)=x-1 & ,x\geq 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=x-1 & ,x<1 \\ \text{ή} & \\ f(x)=x-1 & ,x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=x-1 \ ,x\in R$$

4. f συνεχής & χρήση του Θ.Ε.Τ.

Άσκηση 4.1.

f: R → R , συνεχής $f^2(x)-4f(x)+3=0 \quad ,x\in R$.	Να βρεθεί ο τύπος της f

$f^2(x)-4f(x)+3=0 \quad ,x\in R$

$\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega \;\; f(x)=y \Rightarrow y^2-4y+3=0 \Leftrightarrow y=1 \;\; \acute{\eta} \;\; y=3$

Αυτό σημαίνει ότι οι μοναδικές τιμές που παίρνει η συνάρτηση f είναι το 1 ή το 3.
Δεν σημαίνει ότι η συνάρτηση έχει τύπο f(x) = 1 ή f(x) = 3

Θα μπορούσε , για παράδειγμα να είναι: $f(x)=\begin{cases}1 & , x<0\\ 3 & , x\ge 0\end{cases}$.

Θα αποδείξω ότι η f είναι **σταθερή**.
Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή.
Τότε υπάρχουν α, β ЄR , με α < β έτσι ώστε f(α) = 1 και f(β) = 3.

- f συνεχής στο [α,β].
- 2 μεταξύ του f(α) = 1 και του f(β) = 3

Επομένως, σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ : υπάρχει x_o Є(α,β) έτσι ώστε $f(x_o) = 2$
Αυτό όμως είναι ΑΤΟΠΟ, γιατί οι μοναδικές τιμές που παίρνει η συνάρτηση f είναι το 1 ή το 3.
Άρα ο τύπος της f είναι : f(x) = 1 ,xЄR ή f(x) = 3 ,xЄR

5. f συνεχής & διατηρεί πρόσημο & χρήση του Θ.Ε.Τ.

Άσκηση 5.1.	
f: (0,+∞) → R , συνεχής f(1) = 6 $f(x)\cdot(f\circ f)(x)=6$, x > 0	α. Ν.δ.ο. υπάρχει γ > 0 ώστε f(γ) = 2. β. f(2) = ; γ. Αν η f είναι γν. μονότονη, βρεθεί ο τύπος της

α.

$$f(x)\cdot f(f(x))=6 \quad ,x>0 \qquad (1)$$

$$(1)\overset{x=1}{\Rightarrow} f(1)\cdot f(f(1))=6 \Leftrightarrow 6\cdot f(6)=6 \Leftrightarrow f(6)=1$$

- f συνεχής στο [1,6].
- 2 μεταξύ του f(6) = 1 και του f(1) = 6

Επομένως, σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ : υπάρχει γ Є(1,6) έτσι ώστε f(γ) = 2

β. $(1)\overset{x=\gamma}{\Rightarrow} f(\gamma)\cdot f(f(\gamma))=6 \Leftrightarrow 2\cdot f(2)=6 \Leftrightarrow f(2)=3$

γ. $f(x)\cdot f(f(x))=6 \Rightarrow f(x)\neq 0 \quad ,\mathrm{x}>0 \overset{f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{\Rightarrow} f\ \delta\iota\alpha\tau\eta\rho\varepsilon\acute{\iota}\ \pi\rho\acute{o}\sigma\eta\mu o$.

$f(1)=6>0 \Rightarrow f(x)>0 \quad ,x>0$

*Άλλος τρόπος: επειδή ισχύει $f(x)\cdot f(f(x))=6 \quad ,x>0$, **για να ορίζεται η f(f(x))** , πρέπει f(x)>0.

$$\left.\begin{array}{l}(1)\overset{\acute{o}\pi o\upsilon\ x\ \tau o\ f(x)}{\Rightarrow} f(f(x))\cdot f(f(f(x)))=6 \\ f(x)\cdot f(f(x))=6\end{array}\right\} \Rightarrow f(f(x))\cdot f(f(f(x)))=f(x)\cdot f(f(x))$$

$$\overset{f(f(x))\neq 0}{\Leftrightarrow} f(f(f(x)))=f(x) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} f(f(x))=x \quad ,x>0 \quad (2)$$

$$(1):\ f(x)\cdot f(f(x))=6 \overset{(2)}{\Rightarrow} f(x)\cdot x=6 \Leftrightarrow f(x)=\frac{6}{x} \quad ,x>0$$

Επαλήθευση:

$$f(x)\cdot f(f(x))=\frac{6}{x}\cdot f\left(\frac{6}{x}\right)=\frac{6}{x}\cdot\frac{6}{\frac{6}{x}}=\frac{6}{x}\cdot x=6$$

6.	**f συνεχής στο Δ, παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ με f΄(x) = 0**

Χρήσιμη σχέση: **$f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^x$**

Άσκηση 6.1.	
f: R → R , παραγωγίσιμη $f'(x) = 2f(x) \quad ,x \in R$ $f(0) = 1 \quad ,f(x) > 0 \quad ,x \in R$	α. Ν.δ.ο. η συνάρτηση G(x) = lnf(x) – 2x είναι σταθερή στο R. β. Ν.δ.ο $f(x) = e^{2x}$, xЄR

α. $G'(x) = (\ln f(x) - 2x)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)} - 2 = \dfrac{2f(x)}{f(x)} - 2 = 0 \quad ,x \in R$

Άρα η G είναι σταθερή στο R.

β. $G(x) = c \Leftrightarrow \ln f(x) - 2x = c \qquad (1)$

$(1) \overset{x=0}{\Rightarrow} \ln f(0) - 2 \cdot 0 = c \Leftrightarrow \ln 1 = c \Leftrightarrow c = 0$

$(1) \Rightarrow \ln f(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow \ln f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = e^{2x} \quad x \in R$

Άσκηση 6.2.	
f: R → R , παραγωγίσιμη $f(-x) \cdot f'(x) = x^2 \quad ,x \in R$ $f(0) = 1$ $g(x) = f(x) \cdot f(-x)$	α. Ν.δ.ο. η συνάρτηση g(x) = lnf(x) – 2x είναι σταθερή στο R. β. Να βρεθεί ο τύπος της g.

α. Η g έχει πεδίο ορισμού το R (διάστημα)

$$g'(x) = (f(x) \cdot f(-x))' = f'(x) \cdot f(-x) + f(x) \cdot (f(-x))'$$

$$= f'(x) \cdot f(-x) - f(x) \cdot f'(-x) \overset{*}{=} x^2 - x^2 = 0$$

$* f(-x) \cdot f'(x) = x^2 \overset{\text{όπου } x \text{ το } -x}{\Rightarrow} f(x) \cdot f'(-x) = x^2$

Άρα g σταθερή στο R.

β. $g(x) = c \overset{x=0}{\Rightarrow} g(0) = c \Leftrightarrow f(0) \cdot f(0) = c \Leftrightarrow 1 \cdot 1 = c \Leftrightarrow c = 1$

Ε*πομένως* $g(x) = 1 \quad ,x \in R$

Άσκηση 6.3	
f με A= R $\left(f'(x)+e^{-x}\right)\left(e^{x}f(x)-1\right)=0 \quad ,x\in A$ $f(0)=1$	Να βρεθεί ο τύπος της f.

$$\left(f'(x)+e^{-x}\right)\left(e^{x}f(x)-1\right)=0 \Leftrightarrow \left(f(x)-e^{-x}\right)' e^{x}\left(f(x)-\frac{1}{e^{x}}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)-e^{-x}\right)' e^{x}\left(f(x)-e^{-x}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)-e^{-x}\right)'\left(f(x)-e^{-x}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(f(x)-e^{-x}\right)'\left(f(x)-e^{-x}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(f(x)-e^{-x}\right)^{2}\right)'=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)-e^{-x}\right)^{2}=c \qquad (1)$$

$$(1)\overset{x=0}{\Rightarrow}\left(f(0)-e^{0}\right)^{2}=c \Leftrightarrow c=0$$

$$(1)\Rightarrow \left(f(x)-e^{-x}\right)^{2}=0 \Leftrightarrow f(x)-e^{-x}=0 \Leftrightarrow f(x)=e^{-x}$$

***<u>Σημείωση</u>**: Είναι λάθος να συμπεράνουμε ότι
$\left(f'(x)+e^{-x}\right)\left(e^{x}f(x)-1\right)=0 \Leftrightarrow f'(x)+e^{-x}=0 \;\; ή \;\; e^{x}f(x)-1=0$

7. **f, g συνεχείς στο Δ, παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του Δ με f΄(x) = g΄(x)**

Άσκηση 7.1.	
f: R → R , παραγωγίσιμη $f'(x)=e^x+\sigma\upsilon\nu x+2x \quad ,x\in R$ $f(0)=3$	Να βρεθεί ο τύπος της f.

$$f'(x)=e^x+\sigma\upsilon\nu x+2x \Leftrightarrow f'(x)=\left(e^x+\eta\mu x+x^2\right)'$$

$$\overset{\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\varepsilon\acute{\iota}\varsigma}{\Rightarrow} f(x)=e^x+\eta\mu x+x^2+c \quad ,c\in R.$$

$$f(x)=e^x+\eta\mu x+x^2+c \overset{x=0}{\Rightarrow} f(0)=e^0+\eta\mu 0+0^2+c \Leftrightarrow 3=1+0+c \Leftrightarrow c=2$$

Επομένως $f(x)=e^x+\eta\mu x+x^2+2.$

Άσκηση 7.2.	
f με A=R* $f'(x)=\dfrac{2x^2+1}{x} \quad ,x\in R^*$ $f(1)=f(-1)=2$	Να βρεθεί ο τύπος της f.

Το πεδίο ορισμού R* είναι **ένωση διαστημάτων**.

$$f'(x)=\frac{2x^2+1}{x} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{2x^2}{x}+\frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x)=2x+\frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x)=\left(x^2+\ln|x|\right)'$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} x^2+\ln|x|+c_1 & , x<0 \\ x^2+\ln|x|+c_2 & , x>0 \end{cases}$$

$$f(1)=2 \Leftrightarrow 1^2+\ln|1|+c_2=2 \Leftrightarrow c_2=1$$

$$f(-1)=2 \Leftrightarrow (-1)^2+\ln|-1|+c_1=2 \Leftrightarrow c_1=1$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} x^2+\ln|x|+1 & , x<0 \\ x^2+\ln|x|+1 & , x>0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=x^2+\ln|x|+1 \quad ,x\in R^*$$

Άσκηση 7.3.	
f με A= (1,+∞) $f'(x)=f^2(x) \quad ,x\in A$ $f(x)\neq 0$ $f(2)=-1$	Να βρεθεί ο τύπος της f.

$$f'(x)=f^2(x) \overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)}{f^2(x)}=1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f(x)}\right)'=(x)' \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}=x+c \qquad (1)$$

$$(1)\overset{x=2}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{f(2)}=2+c \Leftrightarrow c=-1$$

$$(1)\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}=x-1 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{1-x} \quad ,x>1$$

Άσκηση 7.4.	
f με A= R $\left[f'(x)\right]^2+f(x)\cdot f''(x)=2e^{2x} \quad ,x\in A$ $f(0)=f'(0)=1$	Να βρεθεί ο τύπος της f.

$$\left[f'(x)\right]^2+f(x)\cdot f''(x)=2e^{2x} \Leftrightarrow f'(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot\left(f'(x)\right)'=2e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)\cdot f'(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)'$$

$$\Leftrightarrow f(x)\cdot f'(x)=e^{2x}+c \qquad (1)$$

$$(1)\overset{x=0}{\Rightarrow} f(0)\cdot f'(0)=e^0+c \Leftrightarrow 1=1+c \Leftrightarrow c=0$$

$$(1)\Rightarrow f(x)\cdot f'(x)=e^{2x} \Leftrightarrow 2f(x)\cdot f'(x)=2e^{2x} \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)=e^{2x}+c_1 \qquad (2)$$

$$(2)\overset{x=0}{\Rightarrow} f^2(0)=e^0+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$$

$$(2)\Rightarrow f^2(x)=e^{2x} \Leftrightarrow |f(x)|=e^x$$

Είναι: f συνεχής με f(x)≠0 για κάθε xЄR, επομένως η f διατηρεί πρόσημο
Επειδή f(0)=1>0 . είναι f(x) > 0 κάθε xЄR
Επομένως: $|f(x)|=e^x \Leftrightarrow f(x)=e^x \quad ,x\in R$

Άσκηση 7.5.	
f με A= R $f'(x)=2xf(x)+2x \quad ,x\in A$ $f(0)=1$	Να βρεθεί ο τύπος της f.

Μορφή: $f'(x)+g(x)\cdot f(x)=h(x) \;\rightarrow$ πολλαπλασιάζω τα 2 μέλη με $e^{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\eta\varsigma\ g(x)}$

$$f'(x)=2xf(x)+2x \Leftrightarrow f'(x)-2xf(x)=2x \Leftrightarrow f'(x)+\left(-x^2\right)' f(x)=2x$$

$$\Leftrightarrow e^{-x^2}f'(x)+e^{-x^2}\left(-x^2\right)' f(x)=2xe^{-x^2} \Leftrightarrow \left(f(x)e^{-x^2}\right)'=\left(-e^{-x^2}\right)'$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^{-x^2}=-e^{-x^2}+c \qquad (1)$$

$$(1)\overset{x=0}{\Rightarrow} f(0)e^0=-e^0+c \Leftrightarrow c=2$$

$$(1)\Rightarrow f(x)e^{-x^2}=-e^{-x^2}+2 \Leftrightarrow f(x)=-1+2e^{x^2}$$

Άσκηση 7.6.	
f συνεχής με A= R $(x-2)f'(x)=2x^2-5x+2 \qquad , \; x\in A$	α. Ν.δ.ο. $f'(x)=2x-1 \qquad ,x\neq 2$ β. Αν f(3) = 7 , να βρεθεί ο τύπος της f.

α. Για x≠ 2 , $f'(x)=\dfrac{2x^2-5x+2}{x-2} \Leftrightarrow f'(x)=2x-1$

β. $f'(x)=2x-1 \Leftrightarrow f'(x)=\left(x^2-x\right)'$ για x ≠ 2

*(Είμαστε στην περίπτωση που **το 2 ανήκει στο πεδίο ορισμού**, αλλά η σχέση f΄(x) =g΄(x) **ισχύει για x ≠ 2**. Εργαζόμαστε ως εξής:)*

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+c_1 & , \; x<2 \\ c & , \; x=2 \\ x^2-x+c_2 & , \; x>2 \end{cases}$$

f συνεχής στο R → f συνεχής στο 2
Επομένως : $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \Leftrightarrow 2+c_1=2+c_2=c$, άρα: $c_1=c_2$

Επίσης: $f(3)=7 \Leftrightarrow 9-3+c_2=7 \Leftrightarrow c_2=1=c_1$

Άρα: c = 3

Οπότε: $f(x)=\begin{cases} x^2-x+1 & , \ x<2 \\ 3 & , \ x=2 \\ x^2-x+1 & , x>2 \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=x^2-x+1 \quad , x\in R$

Άσκηση 7.7.	
f 2 φορές παραγωγίσιμη με A= R $f''(x)=f(x) \quad , \ x\in R$ $f(0)=f'(0)=1$	Να βρεθεί ο τύπος της f..

$$f''(x)=f(x) \Leftrightarrow f''(x)+f'(x)=f(x)+f'(x)$$

$$\Leftrightarrow \left(f'(x)+f(x)\right)'=f'(x)+f(x)$$

Ξέρω ότι: $g'(x)=g(x) \Leftrightarrow g(x)=ce^x$

Ε*πομένως* : $f'(x)+f(x)=c_1\cdot e^x$

Γ*ια* $x=0$ *είναι* $f'(0)+f(0)=c_1\cdot e^0 \Leftrightarrow 1+1=c_1 \Leftrightarrow c_1=2$

Άρα $f'(x)+f(x)=2e^x \Leftrightarrow f'(x)+(x)'f(x)=2e^x$

$$\Leftrightarrow e^x f'(x)+e^x f(x)=2e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \left(e^x f(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)'$$

$$\Leftrightarrow e^x f(x)=e^{2x}+c_2$$

Γ*ια* $x=0$ *είναι* $e^0 f(0)=e^0+c_2 \Leftrightarrow 1=1+c_2 \Leftrightarrow c_2=0$

Ε*πομένως* $e^x f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow f(x)=e^x$

Άσκηση 7.8.

f: $(0,+\infty) \to R$ $f'\left(x^2\right)=3x-1 \quad , \quad x>0$ $f(1)=1$	Να βρεθεί ο τύπος της f..

$$f'\left(x^2\right)=3x-1 \Leftrightarrow 2xf'\left(x^2\right)=2x(3x-1)$$

$$\Leftrightarrow \left(f\left(x^2\right)\right)'=6x^2-2x$$

$$\Leftrightarrow \left(f\left(x^2\right)\right)'=\left(2x^3-x^2\right)'$$

$$\Leftrightarrow f\left(x^2\right)=2x^3-x^2+c \qquad (1)$$

$$(1)\overset{x=1}{\Rightarrow} f(1)=2\cdot 1-1+c \Leftrightarrow c=0$$

$$(1)\Rightarrow f\left(x^2\right)=2x^3-x^2$$

Θέτω $x^2=y \Leftrightarrow x=\sqrt{y} \quad ,(1)\Rightarrow f(y)=2\left(\sqrt{y}\right)^3-y \Leftrightarrow f(y)=2y\sqrt{y}-y \ \ ,y>0$

Επομένως $f(x)=2x\sqrt{x}-x \ \ ,\mathrm{x}>0$