

Τάξη: Γ'

Η αντίστροφη συνάρτηση

Ελένη Μηλιώτη - Παράρτημα της ΕΜΕ Αργολίδας

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 6x + 11, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται στο $(-\infty, 3]$ και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.

Λύση

Κατ' αρχήν ισχύει ότι:

$$f(x) = x^2 - 6x + 11 = x^2 - 6x + 9 + 2 = (x - 3)^2 + 2$$

α) **1^{ος} τρόπος.** Η συνάρτηση f δεν είναι 1-1 αφού ενώ $0 \neq 6$ έχουμε $f(0) = f(6) = 11$. Συνεπώς δεν αντιστρέφεται στο $\mathbb{R}$.

2^{ος} τρόπος. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

Έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 - 3)^2 + 2 = (x_2 - 3)^2 + 2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x_1 - 3)^2} = \sqrt{(x_2 - 3)^2} \Rightarrow |x_1 - 3| = |x_2 - 3| \Rightarrow$$

$$x_1 - 3 = x_2 - 3 \text{ ή } x_1 - 3 = -x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ή }$$

$$x_1 = -x_2 + 6. \text{ Άρα η συνάρτηση } f \text{ δεν είναι 1-1}$$

β) Έστω τώρα $x_1, x_2 \in (-\infty, 3]$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

Έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 - 3)^2 + 2 = (x_2 - 3)^2 + 2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x_1 - 3)^2} = \sqrt{(x_2 - 3)^2} \Rightarrow |x_1 - 3| = |x_2 - 3| \Rightarrow$$

$$x_1 - 3 = x_2 - 3 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ Άρα η } f \text{ είναι 1-1.}$$

Για να βρούμε την αντίστροφη λύνουμε την εξίσωση $f(x) = y$ ως προς x με $x \in (-\infty, 3]$:

Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)^2 + 2 = y \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)^2 = y - 2, y \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x - 3| = \sqrt{y - 2}, y \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x = \sqrt{y - 2}, y \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3 - \sqrt{y - 2}, y \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - \sqrt{y - 2}, y \geq 2 \\ 3 - \sqrt{y - 2} \leq 3, \text{ ισχύει} \end{cases}, (1)$$

$$\text{Επομένως, } f^{-1}(y) = 3 - \sqrt{y - 2}, y \geq 2$$

$$\text{ή } f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x - 2}, x \geq 2.$$

Σημείωση:

Από την (1) προκύπτει ότι για κάθε $y \geq 2$ η εξίσωση $f(x) = y$ έχει, ως προς x , μοναδική λύση στο $(-\infty, 3]$ οπότε η συνάρτηση f είναι 1-1.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x^2 - 2x) = x$.

Λύση

α) Η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ μπορεί να πάρει την μορφή $f(x) = (x - 2)^3$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 - 2)^3 = (x_2 - 2)^3 \Rightarrow$$

$$x_1 - 2 = x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2. \text{ Άρα η } f \text{ είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται στο } \mathbb{R}.$$

Για να βρούμε την αντίστροφη της f , λύνουμε την εξίσωση $f(x) = y$ ως προς x με $x \in \mathbb{R}$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow (x - 2)^3 = y$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = \sqrt[3]{y}, y \geq 0 \text{ ή } x - 2 = -\sqrt[3]{-y}, y < 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt[3]{y}, y \geq 0 \text{ ή } x = 2 - \sqrt[3]{-y}, y < 0.$$

$$\text{Άρα: } f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ 2 - \sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

β) Με $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$f^{-1}(x^2 - 2x) = x \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2x \Leftrightarrow$$

$$(x - 2)^3 = x^2 - 2x \Leftrightarrow (x - 2)^3 - x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 2)[(x - 2)^2 - x] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 2)(x^2 - 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 2 = 0 \text{ ή } x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 4$$

Άσκηση 3

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2, & x \leq 0 \\ 4 - x, & x > 0 \end{cases} \text{ και } g(x) = \begin{cases} -\sqrt{1 - x}, & x \leq 1 \\ \ln x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την αντίστροφή της.

Επισημάνση – Μεθοδολογία:

Στις συναρτήσεις πολλαπλού τύπου ακολουθούμε τα επόμενα βήματα.

- Αποδεικνύουμε ότι κάθε κλάδος της f είναι 1-1
- Στη συνέχεια βρίσκουμε τα σύνολα τιμών για κάθε κλάδο της
- Αν τα σύνολα τιμών έχουν κοινά στοιχεία, τότε υπάρχουν $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$, που σημαίνει ότι η f δεν είναι 1-1.

Λύση

α) Για κάθε κλάδο έχουμε:

Για $x \leq 0$ η $f(x) = x^3 + 2$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1 στο $\Delta_1 = (-\infty, 0]$, με $f(\Delta_1) = (-\infty, 2]$ αφού με $x \in \Delta_1$ έχουμε:

$$x \leq 0 \Leftrightarrow x^3 \leq 0 \Leftrightarrow x^3 + 2 \leq 2 \Leftrightarrow f(x) \leq 2$$

Για $x > 0$ η $f(x) = 4 - x$ είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1 στο $\Delta_2 = (0, +\infty)$, με $f(\Delta_2) = (-\infty, 4)$ αφού με $x \in \Delta_2$ έχουμε:

$$x > 0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow 4 - x < 4 \Leftrightarrow f(x) < 4$$

Παρατηρούμε ότι $f(\Delta_1) \cap f(\Delta_2) \neq \emptyset$. Άρα, υπάρχουν $x_1 \leq 0 < x_2$ με $f(x_1) = f(x_2)$, οπότε η f δεν είναι 1-1.

2^{ος} τρόπος: Παρατηρούμε ότι $f(0) = f(2)$, οπότε η f δεν είναι «1-1» δηλαδή δεν αντιστρέφεται.

β) Για $x \leq 1$ η $g(x) = -\sqrt{1-x}$ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και 1-1 στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$. Για $x \in \Delta_1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} g(x) = y &\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{1-x} = y \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = y^2, y \leq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-y^2, y \leq 0 \\ x \leq 1 \text{ (ισχύει)} \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα $g(\Delta_1) = (-\infty, 0]$

Για $x > 1$ η $g(x) = \ln x + 1$ είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1 στο $\Delta_2 = (1, +\infty)$. Για $x \in \Delta_2$ έχουμε:

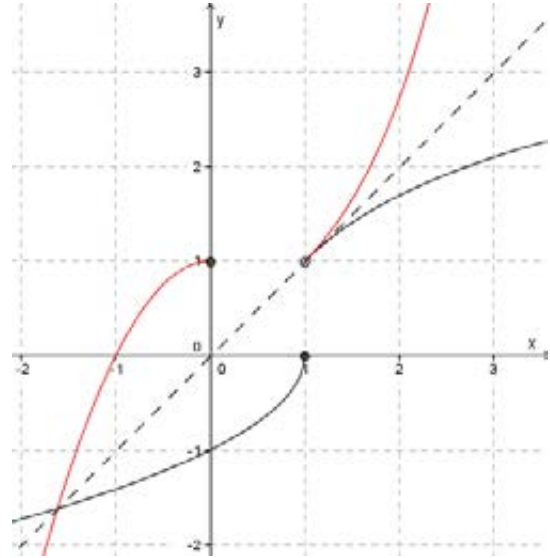
$$\begin{aligned} g(x) = y &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x + 1 = y \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = y - 1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{y-1} \\ x > 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{y-1} \\ e^{y-1} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{y-1} \\ y > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα $g(\Delta_2) = (1, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $g(\Delta_1) \cap g(\Delta_2) = \emptyset$, άρα η συνάρτηση g είναι 1-1. Επομένως η αντίστροφη συνάρτηση είναι:

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \leq 0 \\ e^{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

Παρακάτω βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης g (μαύρο χρώμα) και της συνάρτησης g^{-1} (κόκκινο χρώμα).



Άσκηση 4

Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \lambda^2 - x, & x \leq 1 \\ 2\lambda + 3 - x, & x > 1 \end{cases} \text{ να αντιστρέφεται.}$$

Λύση

Για $x \leq 1$ η $f(x) = \lambda^2 - x$ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και 1-1 στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$, με

$$f(\Delta_1) = [\lambda^2 - 1, +\infty), \text{ αφού με } x \in \Delta_1 \text{ έχουμε:}$$

$$x \leq 1 \Leftrightarrow -x \geq -1 \Leftrightarrow \lambda^2 - x \geq \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow f(x) \geq \lambda^2 - 1$$

Για $x > 1$ η $f(x) = 2\lambda + 3 - x$ είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1 στο $\Delta_2 = (1, +\infty)$, με $f(\Delta_2) = (-\infty, 2\lambda + 2)$, αφού με $x \in \Delta_2$ έχουμε:

$$x > 1 \Leftrightarrow -x < -1 \Leftrightarrow 2\lambda + 3 - x < 2\lambda + 3 - 1 \Leftrightarrow f(x) < 2\lambda + 2$$

Η f αντιστρέφεται μόνο όταν $f(\Delta_1) \cap f(\Delta_2) = \emptyset$, ισοδύναμα:

$$2\lambda + 2 \leq \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq -1 \quad \text{ή} \quad \lambda \geq 3$$

Άσκηση 5

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις αληθείς ή ψευδείς δικαιολογώντας την απάντησή σας.

α) Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε και η αντίστροφή της έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.

β) Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = x$.

γ) Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως

φθίνουσα τότε η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$ είναι πάντοτε ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = x$.

δ) Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής και 1-1 τότε η f^{-1} είναι συνεχής.

Λύση

α) Αληθής.

Απόδειξη: Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , σύνολο τιμών $f(A)$ και γνησίως μονότονη, τότε η f είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού $f(A)$, σύνολο τιμών A και ισχύουν:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in f(A)$$

Υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Θα δείξουμε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή ότι για κάθε $y_1, y_2 \in f(A)$ ισχύει:

$$y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \quad \text{Έστω } y_1, y_2 \in f(A) \text{ με } y_1 < y_2 \text{ Έχουμε: } y_1 < y_2 \Rightarrow$$

$$f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2)) \stackrel{f1}{\Rightarrow} f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

Ομοίως αποδεικνύεται αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Αληθής.

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε $f^{-1}(x_0) = f(x_0)$ και έστω ότι $f(x_0) \neq x_0$. Υποθέτουμε ότι $f(x_0) > x_0$ (1). Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα (όπως αποδείχθηκε στο α ερώτημα) οπότε $(1) \Rightarrow f^{-1}(f(x_0)) > f(x_0) \Rightarrow x_0 > f(x_0)$, άτοπο.

Άρα, $f(x_0) = x_0$ Όμοια αν $f(x_0) < x_0$

Αντίστροφα, αν x_0 είναι μία λύση της εξίσωσης $f(x) = x$. Ισχύει: $f(x_0) = x_0 \Rightarrow x_0 = f^{-1}(x_0)$

$\Rightarrow f(x_0) = f^{-1}(x_0)$ επομένως το x_0 είναι λύση της εξίσωσης $f^{-1}(x) = f(x)$.

γ) Ψευδής.

Η συνάρτηση $f(x) = -x + 2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f^{-1}(x) = -x + 2, x \in \mathbb{R}$

Η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$ έχει άπειρες λύσεις και δεν είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = x$ που έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

δ) Ψευδής

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$ είναι συνεχής, αντιστρέφεται με

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x+1, & 1 < x \leq 2 \end{cases},$$

η οποία δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Άσκηση 6

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \text{ και } |f(x) - f(y)| \geq \frac{1}{\kappa} |x - y|,$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}, (1) \quad \kappa \in (0, 1)$. Να δείξετε ότι:

α) Η f αντιστρέφεται.

$$\beta) |f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq \kappa |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

γ) Η f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

δ) Η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \frac{1}{\kappa} |x_1 - x_2| \Rightarrow \frac{1}{\kappa} |x_1 - x_2| \leq 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

αφού $\kappa \in (0, 1)$. Δηλαδή η f είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

β) Επειδή $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ θέτουμε $f^{-1}(x)$ στο x και $f^{-1}(y)$ στο y οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

γ) Έστω $x_0 \in f(\mathbb{R})$ θα δείξουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f^{-1}(x) = f^{-1}(x_0)$.

Στη σχέση (2) θέτουμε $y = x_0$.

$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)| \leq \kappa |x - x_0| \Rightarrow$$

$$-\kappa |x - x_0| \leq f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0) \leq \kappa |x - x_0|. \text{ Όμως}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (-\kappa |x - x_0|) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (\kappa |x - x_0|) = 0. \text{ Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής ισχύει}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f^{-1}(x) = f^{-1}(x_0)$$

δ) Έστω ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ έχει δύο ρίζες $x_1 \neq x_2$, τότε $f^{-1}(x_1) = x_1$ και $f^{-1}(x_2) = x_2$.

Θέτουμε στην σχέση (2): $x = x_1$ και $y = x_2$ οπότε:

$$|f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2)| \leq \kappa |x_1 - x_2| \Rightarrow$$

$$|x_1 - x_2| \leq \kappa |x_1 - x_2| \Rightarrow \kappa \geq 1 \text{ άτοπο.}$$

Άρα, η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 7

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $f^3(x) + 5f(x) = x + 5$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1).

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} .

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f(2e^{x-3} + x + 8) = 2$.

Λύση

α) Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ θα δείξουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Για $x = x_0$ στην (1) έχουμε:

$$f^3(x_0) + 5f(x_0) = x_0 + 5 \quad (2). \text{ Με αφαίρεση κατά}$$

μέλη των (1) και (2) προκύπτει:

$$f^3(x) - f^3(x_0) + 5f(x) - 5f(x_0) = x - x_0 \Rightarrow$$

$$[f(x) - f(x_0)][f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 5] =$$

$$x - x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{x - x_0}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 5}$$

(αφού $f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 5 > 0$)

Οπότε:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{x - x_0}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 5} \right| \leq$$

$$\leq \frac{|x - x_0|}{5} \Leftrightarrow -\frac{|x - x_0|}{5} \leq f(x) - f(x_0) \leq \frac{|x - x_0|}{5}$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x - x_0|}{5} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} \left(-\frac{|x - x_0|}{5} \right) = 0,$$

από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \text{ ή ισοδύναμα } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Οπότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Ισχύει:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \begin{cases} f^3(x_1) = f^3(x_2) \\ 5f(x_1) = 5f(x_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$f^3(x_1) + 5f(x_1) = f^3(x_2) + 5f(x_2) \Rightarrow$$

$$x_1 + 5 = x_2 + 5 \Rightarrow x_1 = x_2. \text{ Άρα η } f \text{ είναι 1-1 επο-}$$

μένως αντιστρέφεται. Η αντίστροφη συνάρτηση

έχει πεδίο ορισμού το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και για να βρούμε

τον τύπο της θέτουμε $f(x) = y$ στη σχέση (1) οπό-

$$\text{τε: } y^3 + 5y = x + 5 \Leftrightarrow x = y^3 + 5y - 5 \quad \text{άρα}$$

$$f^{-1}(y) = y^3 + 5y - 5, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{ή } f^{-1}(x) = x^3 + 5x - 5 \quad x \in \mathbb{R}$$

γ) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών

παραστάσεων των f και f^{-1} λύνουμε την εξίσωση

$$f^{-1}(x) = f(x) \text{ η οποία είναι ισοδύναμη με την εξί-}$$

σωση $f^{-1}(x) = x$, αφού οι συναρτήσεις f, f^{-1} είναι

γνησίως αύξουσες σύμφωνα με τις προτάσεις που

αποδείξαμε στην άσκηση 5. Είναι:

$$f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow x^3 + 5x - 5 = x \Leftrightarrow x^3 + 4x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1. \text{ Άρα το κοινό σημείο είναι το } (1, 1).$$

$$\delta) f(2e^{x-3} + x + 8) = 2 \Leftrightarrow 2e^{x-3} + x + 8 = f^{-1}(2) \Leftrightarrow$$

$$2e^{x-3} + x + 8 = 13 \Leftrightarrow 2e^{x-3} + x - 5 = 0$$

Η εξίσωση έχει προφανή λύση την $x = 3$.

Όμως η συνάρτηση $g(x) = 2e^{x-3} + x - 5, x \in \mathbb{R}$ εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι γνησίως αύξουσα οπότε και 1-1, οπότε η λύση $x = 3$ είναι μοναδική.

Σημαντικές και αξιόλογες δωρεές

Πολλές φορές βλέπεις βιβλιοθήκες με αξιόλογα βιβλία, που είναι μεστές από περιεχόμενο και σωστή **ιστορική εξέλιξη** αναφοράς, σε δρώμενα που είχαν και εξακολουθούν να έχουν **σημασία**. Έτσι, χωρίς να το θέλεις, νοιώθεις ότι παρακολουθείς μέσα από αυτό, κάθε τι που σημάδεψε το επίκαιρο, το χρήσιμο, το ουσιαστικό, το ζητούμενο. Ειδικά για την εκπαίδευση και τα Μαθηματικά είναι ένα βήμα **προόδου** και ένας πολύτιμος **πλούτος** για τις επόμενες γενιές

Δωρεά βιβλίων από την Οικογένεια του Δημήτρη Καραγιώργου

Η οικογένεια του εκλιπόντος εκλεκτού μέλους της ΕΜΕ Δημήτρη Καραγιώργου, μόνιμου παρέδρου του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου και συγγραφέα πολλών βιβλίων, δώρισε στην ΕΜΕ τις παρακάτω εκδόσεις.

Περιλαμβάνει βιβλία Μαθηματικών και βιβλία ειδικής διδακτικής και παιδαγωγικών. Ξεχωρίζουν από τα **(62)** βιβλία σε ελληνική γλώσσα, από το **1950** και ύστερα, όπως των Μαντά, Ζήβα, Καζαντζή, Κανέλλου, Κωστάκη, Εξαρχάκου, Μάγειρα, Polya, Ν. Κριτικού, Birkhoff, Gardner κ.λ.π. και **(5)** δικά του βιβλία σε θέματα διδακτικής και στατιστικής. Επίσης **(110)** ξενόγλωσσα κυρίως σε θέματα εκπαίδευσης, Μαθηματικών, ειδικής διδακτικής, Παιδαγωγικά, Ιστορία και Φιλοσοφία των Μαθηματικών

Δωρεά βιβλίων από τον Παναγιώτη Γ. Μαυραγάνη

Από τον συνάδελφο **Παναγιώτη Γ. Μαυραγάνη** λάβαμε τα παρακάτω βιβλία, ανάμεσα στα οποία υπάρχουν και πολλές παλιές και ιδιαίτερα αξιόλογες εκδόσεις.

Περιλαμβάνει βιβλία Μαθηματικών από το **1918** και ύστερα σε θέματα κυρίως Στερεομετρίας, Προβολικής Γεωμετρίας, Μετεωρολογίας, Τριγωνομετρίας, Άλγεβρας, κ.λ.π. με πιο χαρακτηριστικά αυτά των Αιγινήτη, Κανέλλου, Gask, Thomson, Λαδόπουλου, Herzberg, Σακελλαρίου, Κυπάρισου Στέφανου, Βαρόπουλου, Πάλλα, Χατζιδάκη, κ.λ.π

Αναλυτικές πληροφορίες: www.hms.gr

Άσκηση 1. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f^3(x) + 3f(x) + x = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Α. α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.

γ) Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση f^{-1} και δίνεται από τον τύπο $f^{-1}(x) = -x^3 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$.

δ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{f^{-1}(x)}$ και **ii)** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) + 4}{x^2 - 1}$

Β. α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και ότι η συνάρτηση g με $g(x) = e^{f(x)} + f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τον αριθμό $g^{-1}(1)$.

Λύση

Α. α) Για $x = 0$ η δοσμένη σχέση μας δίνει: $f^3(0) + 3f(0) + 0 = 0 \Leftrightarrow f(0)(f^2(0) + 3) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

β) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f^3(x_1) = f^3(x_2) \\ 3f(x_1) = 3f(x_2) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$f^3(x_1) + 3f(x_1) = f^3(x_2) + 3f(x_2) \Rightarrow$$

$$-x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2, \text{ άρα η συνάρτηση είναι 1-1.}$$

γ) Η συνάρτηση f είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται και αφού έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ μπορούμε στην αρχική σχέση να βάλουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και να αξιοποιήσουμε την ισότητα $f(f^{-1}(x)) = x$.

$$\text{Είναι: } (f(f^{-1}(x)))^3 + 3f(f^{-1}(x)) + f^{-1}(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 3x + f^{-1}(x) = 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x^3 - 3x, x \in \mathbb{R}$$

δ) i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{-x^3 - 3x} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{(-x^2 - 3)} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^3 - 3x + 4}{x^2 - 1} =$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(-x^2 - x - 4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 - x - 4}{x+1} = -3$$

Β. α) 1ος τρόπος: Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$

Τότε έχουμε:

$$-x_1 > -x_2 \Rightarrow f^3(x_1) + 3f(x_1) > f^3(x_2) + 3f(x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^3(x_1) - f^3(x_2) + 3f(x_1) - 3f(x_2) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f(x_1) - f(x_2)) \cdot (f^2(x_1) - f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) + 3) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, γιατί αν θεωρήσουμε την παράσταση

$$f^2(x_1) - f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) + 3 \text{ ως τριώνυμο του } y = f(x_1) \text{ έχει διακρίνουσα}$$

$$\Delta = f^2(x_2) - 4f^2(x_2) - 12 = -3f^2(x_2) - 12 < 0$$

$$\text{οπότε } f^2(x_1) - f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) + 3 > 0.$$

2ος τρόπος: $f^3(x) + 3f(x) + x = 0 \Leftrightarrow$

$$f^3(x) + 3f(x) = -x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση $\varphi(x) = -x$ είναι γνησίως φθίνουσα

στο $\mathbb{R}$. Αν θεωρήσουμε την $h(x) = x^3 + 3x, x \in \mathbb{R}$,

έχουμε ότι $h(f(x)) = f^3(x) + 3f(x)$ και:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1^3 < x_2^3 \\ 3x_1 < 3x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1^3 + 3x_1 < x_2^3 + 3x_2 \Rightarrow$$

$h(x_1) < h(x_2)$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα

στο $\mathbb{R}$. Άρα με $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow$

$$h(f(x_1)) > h(f(x_2)) \xRightarrow{h<} f(x_1) > f(x_2) \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}.$$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f \text{ γν. φθίν. } f(x_1) > f(x_2) \\ -x_1 > -x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} e^{f(x_1)} > e^{f(x_2)} \\ f(x_1) > f(x_2) \\ -x_1 > -x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$g(x_1) > g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Αφού η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, είναι και 1-1, άρα ορίζεται η g^{-1} . Για $x = 0$ έχουμε $g(0) = e^{f(0)} + f(0) - 0 = e^0 = 1$, άρα $g^{-1}(1) = 0$.

Άσκηση 2. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy.$$

α) Να δείξετε ότι ισχύει $f(x) + f(-x) = 2x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \alpha > 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\alpha} f(x) = 1$, να

βρεθεί το α .

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

δ) Να δείξετε ότι κάθε συνάρτηση $g(x) = x^2 + \lambda x$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, επαληθεύει την αρχική συνθήκη.

Λύση α) Στις συναρτησιακές σχέσεις της μορφής $(f(x+y) = \dots)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ συνήθως το μυστικό είναι να βρούμε το $f(0)$. Αφού η σχέση ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, θέτουμε όπου $x = y = 0$ και έχουμε:

$$f(0+0) = f(0) + f(0) + 2 \cdot 0 \cdot 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$$

Στη συναρτησιακή σχέση θέτουμε τώρα όπου y το $-x$ και έχουμε: $f(x+(-x)) = f(x) + f(-x) + 2x(-x) \Rightarrow f(0) = f(x) + f(-x) - 2x^2 \Rightarrow f(x) + f(-x) - 2x^2 = 0 \Rightarrow f(x) + f(-x) = 2x^2$

β) Όταν σε άσκηση μας δίνεται το όριο $\lim_{x \rightarrow k} f(x)$ και μας ζητούν να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow m} f(x)$, τότε υποχρεωτικά πρέπει να κάνουμε αλλαγή στη μεταβλητή. Έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \alpha > 0$.

Αν θέσουμε όπου x το $-u$ τότε, αφού το $x \rightarrow \alpha$ το $-x \rightarrow -\alpha$ οπότε το $u \rightarrow -\alpha$ και έχουμε:

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{u \rightarrow -\alpha} f(-u) = \lim_{u \rightarrow -\alpha} [2u^2 - f(u)] = 2\alpha^2 - \lim_{u \rightarrow -\alpha} f(u).$$

Άρα $\lim_{u \rightarrow -\alpha} f(u) = 2\alpha^2 - \alpha$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow -\alpha} f(x) = 1$,

έχουμε τελικά $2\alpha^2 - \alpha = 1 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\alpha = 1 \text{ ή } \alpha = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

γ) Θέλουμε να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ το οποίο

γράφεται $\lim_{x \rightarrow 4} f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)$. Με τη βοήθεια της

αρχικής σχέσης έχουμε $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) =$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left[2f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \right]. \text{ Θέτουμε όπου } \frac{x}{2} \text{ το } u, \text{ οπότε}$$

αφού το $x \rightarrow 4$ το $u \rightarrow 2$ και έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left[2f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \right] = \lim_{u \rightarrow 2} [2f(u) + 2u^2] = 10$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 10$.

δ) $g(x+y) = (x+y)^2 + \lambda(x+y) =$

$$x^2 + 2xy + y^2 + \lambda x + \lambda y =$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + \lambda x + \lambda y = g(x) + g(y) + 2xy$$

Άσκηση 3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν τα εξής:

i. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της με $f(0) = e^2$, $f(1) = e^4$ και για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $f(x) > 0$,

ii. $g(x) = \ln(f(x))$, για κάθε $x \in [0,1]$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε ένα τουλάχιστον σημείο $M_0(x_0, 3)$ με $x_0 \in (0,1)$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f^2(\xi) = f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f\left(\frac{2}{3}\right)$.

Λύση α) Η συνάρτηση $g(x) = \ln(f(x))$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Για $x = 0$ έχουμε $g(0) = \ln(f(0)) = \ln(e^2) = 2$ και για $x = 1$ έχουμε $g(1) = \ln(f(1)) = \ln(e^4) = 4$. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 3 περιέχεται μεταξύ των $g(0)$ και $g(1)$, άρα απ' το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 3$, δηλαδή η ευθεία $y = 3$ τέμνει την C_g σε ένα τουλάχιστον σημείο.

β) Αφού η συνάρτηση $g(x) = \ln(f(x))$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ θα παρουσιάζει μέγιστη M και ελάχιστη τιμή m στο $[0,1]$, άρα θα έχουμε $m \leq g(x) \leq M$ για κάθε $x \in [0,1]$. Για $x = \frac{1}{3}$

$$\text{έχουμε } m \leq g\left(\frac{1}{3}\right) \leq M \Rightarrow m \leq \ln\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right) \leq M \quad (1).$$

$$\text{Για } x = \frac{2}{3} \text{ έχουμε } m \leq g\left(\frac{2}{3}\right) \leq M \Rightarrow$$

$$m \leq \ln\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right) \leq M \quad (2).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$2m \leq \ln\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right) + \ln\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right) \leq 2M \Rightarrow$$

$$m \leq \frac{\ln\left(f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f\left(\frac{2}{3}\right)\right)}{2} \leq M \quad (3).$$

Από την σχέση (3), από ΘΕΤ υπάρχει $\xi \in (0,1)$

$$\text{ώστε } g(\xi) = \frac{\ln\left(f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f\left(\frac{2}{3}\right)\right)}{2} \Rightarrow$$

$$\ln(f(\xi)) = \frac{\ln\left(f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f\left(\frac{2}{3}\right)\right)}{2} \Rightarrow$$

$$\ln(f^2(\xi)) = \ln\left(f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f\left(\frac{2}{3}\right)\right) \Rightarrow f^2(\xi) = f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f\left(\frac{2}{3}\right)$$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2020 – 2021

Θέμα Α

A1. Πότε μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται 1-1; [Mov: 4]

A2. Δίνεται ο ισχυρισμός:

«Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της, τότε θα είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα αυτό.»

Να χαρακτηρίσετε την πρόταση ως **Αληθής** ή **Ψευδής** και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

[Mov: 1 + 4]

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. [Mov: 2x8=16]

α) Δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες, αν υπάρχουν κάποια $x \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f(x) = g(x)$.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση $(-f)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$, τότε και η συνάρτηση $g \circ f$ είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.

δ) Αν μια συνάρτηση είναι άρτια, τότε υπάρχει η αντίστροφή της.

ε) Η συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της A , αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 = x_2$ είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

στ) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$.

ζ) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

η) Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1} .

Θέμα Β

Δίνονται οι αντιστρέψιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι: $f^{-1}(g(x) + 2) = 4 - x$ και

$$g^{-1}(8 - 2x - f(4 - x)) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

A. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ και

$$g(x) = 3 - x, x \in \mathbb{R}. \quad [\text{Mov: 10}]$$

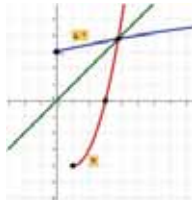
B. Ορίζουμε την $h(x) = -(f \cdot g)(x)$ με $x \geq 1$.

α. Να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

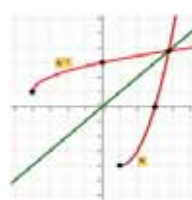
β. Να βρείτε τα σημεία στα οποία:

- Η C_h τέμνει τον άξονα $x'y'$
- Η C_h τέμνει τον άξονα $y'y''$.

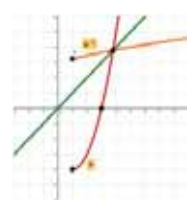
γ. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα και τα στοιχεία από τα προηγούμενα ερωτήματα, να αναφέρετε ποιο από τα παρακάτω σχήματα 1, 2, ή 3 νομίζετε ότι είναι αυτό που δείχνει τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων h και h^{-1} , δικαιολογώντας την απάντησή σας.



σχήμα 1



σχήμα 2



σχήμα 3

[Mov: 15]

Θέμα Γ

Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις με

$$f(x) = x + e^x - 1 \text{ και } g(x) + e^{g(x)} = x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , με τον άξονα xx' [Mov: 4]

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. [Mov: 5]

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $(g \circ f)(x) > 0$. [Mov: 7]

Γ4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της g^{-1} . [Mov: 9]

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln(x + 1) - 1$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. [Mov: 7]

ii) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2} + \ln(x^2 + 1) > 1$. [Mov: 8]

iii) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2} - e^{x+2} > \ln\left(\frac{x+3}{x^2+1}\right)$. [Mov: 10]