

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕ ΘΕΜΑ:  
«**Μαθηματική μοντελοποίηση**»<sup>1</sup>

***Διερεύνηση μαθηματικών εννοιών μέσα από  
την επίλυση καθημερινών προβλημάτων***

**Ταυτότητα Σχεδίου Εργασίας**

**Σκοπός:** Το παρόν Σχεδίου Εργασίας έχει ως σκοπό του να βοηθήσει τους μαθητές να προσεγγίσουν θεωρητικές μαθηματικές έννοιες μέσα από την προσπάθεια διερεύνησης προβλημάτων της καθημερινής ζωής ή της ερμηνείας φυσικών φαινομένων. Οι μαθητές καλούνται να μεταπλάσουν προβλήματα από την καθημερινή ζωή σε μαθηματικά προβλήματα (μαθηματική μοντελοποίηση) και στη συνέχεια, με την χρήση μαθηματικών διαδικασιών και εννοιών, να τα επιλύσουν. Ταυτόχρονα, οι μαθητές ασκούνται στο να συνδέουν αφηρημένες μαθηματικές έννοιες με φυσικά φαινόμενα ή συγκεκριμένες έννοιες του φυσικού κόσμου. Η διασύνδεση αυτή των αφηρημένων μαθηματικών εννοιών με φυσικές έννοιες διευκολύνεται ιδιαίτερα από την χρήση των ΝΤ και συγκεκριμένα των εκπαιδευτικών λογισμικών και του διαδικτύου, γεγονός που αιτιολογεί την εκτεταμένη χρήση τους στη διάρκεια των προτεινόμενων δραστηριοτήτων.

**Κύριο Επιστημονικό Πεδίο: Μαθηματικά, Φυσικές Επιστήμες και Τεχνολογία**

---

<sup>1</sup> Υπόδειγμα με βάση το 4<sup>ο</sup> Σχήμα

## **Εμπλεκόμενα Μαθήματα:**

**Μαθηματικά:** Έννοια της συνάρτησης, γραφική παράσταση συνάρτησης, είδη συνάρτησης, μονοτονία και ακρότατα (Μαθηματικά Α' Λυκείου).

**Πληροφορική:** Χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού και αναζήτηση πληροφοριών στο διαδίκτυο.

## **Προγραμματική Συνάντηση Καθηγητών**

Οι εμπλεκόμενοι καθηγητές στην προγραμματική τους συνάντηση αποφασίζουν ποιες δραστηριότητες από τις προτεινόμενες ή ποιο μέρος τους θα καλύψει ο καθένας. Επίσης, συναποφασίζουν ποια είναι τα κεντρικά ερωτήματα που θα μελετήσουν στο πλαίσιο κάθε δραστηριότητας και πώς αυτά προωθούν την κεντρική ιδέα της μαθηματικής μοντελοποίησης στην διδακτική πράξη. Εκτός από τους κατά κύριο λόγο εμπλεκόμενους καθηγητές, διευκρινίζεται ότι μπορεί να κληθούν να συμβάλουν, εκτός του καθιερωμένου τρίωρου των ΣΕ, στο πλαίσιο του δικού τους μαθήματος και άλλοι καθηγητές, όπως για παράδειγμα, ο καθηγητής Πληροφορικής εκπαιδεύοντας τους μαθητές στην χρήση κατάλληλων εκπαιδευτικών λογισμικών. Επίσης, στο πλαίσιο της προγραμματικής συνάντησης πρέπει να γίνει και κατανομή του χρόνου, καθώς επίσης και καθορισμός της σειράς με την οποία θα διεξαχθούν οι επιμέρους δραστηριότητες.

## **Ενημέρωση και Οργάνωση Μαθητικού Δυναμικού**

- Κατά την πρώτη ώρα συνάντησης των καθηγητών με τους είκοσι περίπου μαθητές, ενημερώνονται οι τελευταίοι για το γενικό προγραμματισμό που έχουν κάνει οι καθηγητές και διευκρινίζεται ότι είναι ενδεικτικός και ότι μπορεί να μεταβληθεί, ανάλογα με την πορεία των εργασιών της ομάδας. Επίσης, στην πρώτη συνάντηση εξηγείται στους μαθητές ότι τα Σχέδια Εργασίας και οι διερευνήσεις αυτού του τύπου γίνονται συνήθως από μικρές ομάδες στενά συνεργαζόμενων μαθητών, όπως άλλωστε συμβαίνει και στον χώρο της επιστημονικής έρευνας. Οι μαθητικές μικρο-ομάδες ενδείκνυται να είναι τριμελείς ή τετραμελείς και η κατανομή των μα-

θητών σε αυτές αποτελεί συνήθως τη συνισταμένη των μαθητικών επιλογών και της παρέμβασης του καθηγητή, η οποία αποβλέπει να εντάξει σε κάποια ομάδα μαθητές που υποθέτει ότι κινδυνεύουν να μείνουν έξω από τις προτιμήσεις των συμμαθητών τους. Σε αυτές τις περιπτώσεις, αν οι καθηγητές το κρίνουν σκόπιμο, μπορούν στο πλαίσιο κάθε νέας διάστασης να κάνουν και τις αναγκαίες αναδιοργανώσεις των ομάδων. Σε κάθε περίπτωση οι μαθητές του ίδιο θέματος θα εργάζονται χωρισμένοι σε 5-7 μικρο-ομάδες και θα έχουν προγραμματισμένες ώρες «ολομέλειας», όπου θα γίνονται ανακοινώσεις, συγκρίσεις, αναλύσεις και συνθέσεις της τελικής εργασίας. Ο τρόπος παρουσίασης του έργου των μικρο-ομάδων και της συνολικής ομάδας ποικίλει ανάλογα με τη φύση του έργου και περιλαμβάνει συνδυαστικά επιστημονικές εκθέσεις, σχεδιαγράμματα, γραφικές παραστάσεις και προσομοιώσεις φαινομένων με χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού (π.χ. προβλήματα διερεύνησης της καθημερινής ζωής τα οποία επιλύονται με τη βοήθεια συναρτήσεων που καλούνται οι μαθητές να κατασκευάσουν,

- ασκήσεις που προτείνουν στους μαθητές μέσα από συγκεκριμένες ερωτήσεις, να διερευνήσουν τον τύπο, τα χαρακτηριστικά μεγέθη (μονοτονία, ακρότατα, κτλ.) και τις παραμέτρους μιας συνάρτησης εκτελώντας μετασχηματισμούς (μετατοπίσεις, ανοίγματα, συμμετρίες κτλ.) στην γραφική της παράσταση.

Οι προτεινόμενες δραστηριότητες εστιάζουν στην γραμμική συνάρτηση, το τριώνυμο και την αριθμητική πρόοδο (αφού αυτές είναι οι κύριες συναρτήσεις που διδάσκονται στην Α' Λυκείου), αλλά επιδέχονται τροποποιήσεις και επεκτάσεις και μπορούν να αποτελέσουν «γεννήτριες» πολλών άλλων δραστηριοτήτων ανάλογα με τους διδακτικούς στόχους του εκάστοτε διδάσκοντα.

Function Probe, Sketchpad, Modellus), εισηγήσεις με τη μορφή Powerpoint, έμπρακτες παρεμβάσεις στο χώρο του σχολείου και της τοπικής κοινότητας.

## **Διεξαγωγή του Σχεδίου Εργασίας**

Το ΣΕ υλοποιείται με την διεξαγωγή ενός συνόλου δραστηριοτήτων που αφορούν την διδασκαλία και μελέτη των συναρτήσεων, καθώς και των μετασχηματισμών τους με βάση την διδακτέα ύλη της Α' Λυκείου. Οι δραστηριότητες αποτελούνται από:

## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

### 1. Η πρόσκληση

**1.1. Σύντομη περιγραφή:** Οι μαθητές μιας τάξης του σχολείου διοργανώνουν μια εκδήλωση και πρέπει να ετοιμάσουν προσκλήσεις. Για το σχεδιασμό μιας πρόσκλησης θα χρησιμοποιηθεί χαρτί σε σχήμα παραλληλογράμμου. Λαμβάνοντας υπόψη ότι το εμβαδό του τυπωμένου μέρους της πρόσκλησης και τα περιθώρια εκτύπωσης είναι δεδομένα, ζητείται να βρεθεί το ελάχιστο εμβαδό του χαρτιού που πρέπει να χρησιμοποιηθεί για την πρόσκληση. Η πρόσκληση κατόπιν γίνεται ανακοίνωση και ζητείται να βρεθεί το μέγιστο εμβαδό του χαρτιού που θα χρησιμοποιηθεί ώστε να ισχύουν οι ίδιες προϋποθέσεις, αλλά και ένας επιπλέον περιορισμός για την αναλογία μήκους και πλάτους της ανακοίνωσης.

### 1.2. Εμπλεκόμενα Μαθήματα:

- Μαθηματικά
- Πληροφορική

### 1.3. Διδακτικοί στόχοι:

- Μελέτη μέγιστης και ελάχιστης τιμής μιας συνάρτησης με τη βοήθεια του πίνακα τιμών και της γραφικής παράστασής της.
- Χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού Function Probe, αναζήτηση στο διαδίκτυο.

### 1.4. Εκτιμώμενη διάρκεια: 4-8 διδακτικές ώρες

### 1.5. Διεξαγωγή της δραστηριότητας:

- **Α' Φάση:** Η δραστηριότητα αρχίζει με την ενημέρωση των μαθητών από τον διδάσκοντα για τον τρόπο και την μεθοδολογία που θα ακολουθήσουν στην ερευνητική δράση που θα εκτελέσουν. Συγκεκριμένα τους παρουσιάζει την μαθηματική μοντελοποίηση δηλαδή την μετάπλαση προβλημάτων από την καθημερινή ζωή σε μαθηματικά προβλήματα και στη συνέχεια, με την χρήση μαθηματικών διαδικασιών και εννοιών, την επίλυση τους και συζητεί μαζί τους για τον ρόλο της στην προσέγγιση αφηρημένων θεωρητικών εννοιών των Μαθηματικών.

Στην συνέχεια, ο διδάσκων συζητεί με τους μαθητές για τα οφέλη αλλά και για τους πιθανούς κινδύνους από την χρήση των Νέων Τεχνολογιών στην διδασκαλία και προτείνει την χρήση συγκεκριμένων εκπαιδευτικών λογισμικών για την διεξαγωγή της δραστηριότητας.

- **Β' Φάση:** Ακολουθεί μια σύντομη παρουσίαση του εκπαιδευτικού λογισμικού Function Probe και επιχειρείται η εξοικείωση των μαθητών με τις βασικές λειτουργίες του.

- **Γ΄ Φάση:** Παρουσιάζεται στους μαθητές ο προβληματισμός της δραστηριότητας και τους υποδεικνύεται μέσω ενός φύλλου εργασίας μια ενδεχόμενη πορεία για την διερεύνηση του προβληματισμού.

## Φύλλο εργασίας

Η τάξη σου διοργανώνει μια εκδήλωση και πρέπει να ετοιμάσει προσκλήσεις. Αποφασίστηκε η πρόσκληση να αποτελείται από  $400 \text{ cm}^2$  τυπωμένο υλικό με άνω και κάτω περιθώριο 3 cm και αριστερό και δεξί περιθώριο 2 cm. Επίσης, λόγω του κόστους του χαρτιού, οι προσκλήσεις πρέπει να τυπωθούν σε χαρτί με ελάχιστη επιφάνεια(εμβαδόν). Αν το χαρτί κοστίζει 1,5 λεπτά το  $1 \text{ cm}^2$  να βρεθούν οι διαστάσεις του χαρτιού για την εκτύπωση μιας πρόσκλησης καθώς και το κόστος της.

**1.** Να σχεδιάσετε στο φύλλο εργασίας ένα σχήμα για την πρόσκληση και να μαθηματικοποιήσετε το πρόβλημα επιλέγοντας μια μεταβλητή, π.χ. το πλάτος της εκτύπωσης έστω  $z$  και εκφράζοντας τα υπόλοιπα εμπλεκόμενα μεγέθη, μήκος εκτύπωσης, μήκος και πλάτος ολόκληρης της πρόσκλησης σε σχέση με το « $z$ ».

Μήκος εκτύπωσης: .....

Μήκος πρόσκλησης: .....

Πλάτος πρόσκλησης: .....

**2.** Να κατασκευάσετε στο λογισμικό Function Probe έναν πίνακα με τις ακόλουθες στήλες: "Πλάτος εκτύπωσης", "Μήκος εκτύπωσης", "Πλάτος πρόσκλησης", "Μήκος πρόσκλησης", "Εμβαδόν πρόσκλησης". Να συμπληρώσετε τουλάχιστον 20 τιμές σε κάθε στήλη. Επιλέξτε το κατάλληλο εύρος τιμών για το « $z$ ».

**3.** Καθώς αυξάνονται οι τιμές στην στήλη « $z$ », τι συμβαίνει στις τιμές κάθε μιας από τις άλλες στήλες;

.....  
.....  
.....  
.....

**4.** Υπάρχει ελάχιστη τιμή για το εμβαδόν της πρόσκλησης; Αν υπάρχει, υπολογίστε την και εξηγήστε με ποιον τρόπο την βρήκατε.

.....  
.....  
.....

**5.** Υπάρχει ελάχιστη τιμή για το εμβαδόν της πρόσκλησης; Να στείλετε τις στήλες : "Πλάτος εκτύπωσης" και "Εμβαδόν πρόσκλησης" στο παράθυρο "Γράφημα" του FP, προκειμένου να ελέγξετε την υπόθεσή σας.

.....  
.....  
.....

**6.** Το κατάστημα για τις εκτυπώσεις διαθέτει ένα μηχάνημα που μπορεί να κόβει το χαρτί με ακρίβεια χιλιοστού. Να βρεθούν οι διαστάσεις του χαρτιού με το ελάχιστο εμβαδό που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή. Αν το χαρτί που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί κοστίζει 1,5 λεπτά το  $1\text{cm}^2$ , πόσο θα πληρώσει η τάξη για κάθε πρόσκληση;

.....  
.....  
.....

**7.** Εκτός από τις προσκλήσεις, η τάξη αποφάσισε να κολλήσει μια ανακοίνωση στον πίνακα ανακοινώσεων του σχολείου για να ενημερωθούν για την εκδήλωση και οι υπόλοιποι μαθητές του σχολείου. Αυτή τη φορά, όμως, θέλει να μεγιστοποιήσει το εμβαδόν της, ώστε το περιεχόμενο της ανακοίνωσης να διαβάζεται από απόσταση. Εξακολουθούν να ισχύουν οι υπόλοιποι περιορισμοί και επιπλέον, για λόγους αισθητικής αποφασίστηκε

το μήκος και το πλάτος της ανακοίνωσης να μην διαφέρουν περισσότερο από 4 cm. Για να βοηθηθείτε δημιουργήστε μια νέα στήλη στον πίνακα του FP που να δείχνει τη διαφορά των διαστάσεων της πρόσκλησης. Πώς ερμηνεύονται οι αρνητικές τιμές της στήλης αυτής.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**Δ' Φάση:** Ζητείται από τους μαθητές να αποτυπώσουν τις διερευνήσεις τους, τα αρχεία του FP με τους πίνακες δεδομένων και τα γραφήματα και τα συμπεράσματα τους σε ηλεκτρονική μορφή (π.χ. αρχεία Power Point), υλικό που θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο αξιολόγησης με κριτήρια την σαφήνεια, την συλλογιστική ικανότητα, την ικανότητα συμπερασμού και την συλλογική συμμετοχή των μελών της ομάδας.

**Ε' Φάση:** Ζητείται από τους μαθητές να διατυπώσουν τα σχόλιά τους και τις παρατηρήσεις τους για την διαδικασία μαθηματικο-ποίησης ενός πραγματικού προβλήματος και την συμβολή της χρήσης ενός εκπαιδευτικού λογισμικού στην διερεύνηση του προβλήματος.

### 1.6. Οδηγίες προς τους καθηγητές:



- Στην Γ' Φάση ο καθηγητής θα χωρίσει την τάξη σε ομάδες των 3-4 μαθητών φροντίζοντας σε κάθε ομάδα να υπάρχει 1 τουλάχιστον μαθητής εξοικειωμένος με την χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού.
- Στο ερώτημα 4 του ΦΕ , αφού οι μαθητές παρατηρήσουν από τον πίνακα ότι το εμβαδόν ελαττώνεται, αλλά κάποια στιγμή αρχίζει να αυξάνεται και εφόσον οι μαθητές δυσκολεύονται να εντοπίσουν την ελάχιστη τιμή θα πρέπει να τους προταθεί να χρησιμοποιήσουν την εντολή του FP «Ενδιάμεσο Γέμισμα». Επίσης για να δουν ποια ακριβώς τιμή του  $z$  δίνει το ελάχιστο εμβαδό θα πρέπει να ορίσουν στις «Ρυθμίσεις στήλης» τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων που τους επιτρέπει να βγάλουν ένα συμπέρασμα.

## 2. Η εκδρομή

**2.1. Προβληματισμός:** Ένα σχολείο προγραμματίζει μια εκδρομή και το τουριστικό πρακτορείο στο οποίο απευθύνεται κάνει αρχικά μια συγκεκριμένη προσφορά, αλλά στη συνέχεια προκειμένου να προσελκύσει περισσότερους μαθητές δήλωσε ότι θα μειώσει την τιμή κατά ένα ποσό, με την προϋπόθεση οι συμμετέχοντες να ξεπερνούν έναν ορισμένο αριθμό. Ζητείται να διερευνηθεί το κέρδος του τουριστικού πρακτορείου ανάλογα με τον αριθμό των συμμετεχόντων.

### 2.2. Εμπλεκόμενα Μαθήματα:

- Μαθηματικά
- Πληροφορική

### **2.3. Διδακτικοί στόχοι:**

- Χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων δευτεροβάθμιας συνάρτησης (πίνακας τιμών, τύπος και γραφική παράσταση). Έννοια μέγιστης τιμής συνάρτησης.
- Ανάδειξη της χρησιμότητας αξιοποίησης των Νέων Τεχνολογιών στην διδακτική πράξη. Χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού για την πολλαπλή αναπαράσταση συνάρτησης.

### **2.4. Εκτιμώμενη διάρκεια:** 3-8 διδακτικές ώρες

### **2.5. Διεξαγωγή της δραστηριότητας:**

#### **Α΄ Φάση: Το θέμα και το πλαίσιο της δραστηριότητας**

Αρχικά ο καθηγητής προτείνει στους μαθητές την διερεύνηση του ακόλουθου προβλήματος:

« Το σχολείο σας οργανώνει μια εκδρομή. Απευθύνεται σε ένα τουριστικό πρακτορείο για να πάρει προσφορά. Το πρακτορείο αρχικά σκόπευε να χρεώσει 150€ για κάθε μαθητή. Δεδομένου όμως ότι 100 μαθητές έχουν ήδη δηλώσει συμμετοχή στην εκδρομή προτίθεται να μειώσει το κόστος συμμετοχής όλων των μαθητών κατά 10 € για κάθε επιπλέον μαθητή που συμμετέχει πέρα από τους πρώτους 100. Να διερευνήσετε πως διαμορφώνεται το κόστος της εκδρομής μετά την νέα αυτή προσφορά του τουριστικού πρακτορείου; Πόσοι μαθητές πρέπει να συμμετάσχουν στην εκδρομή ώστε η προσφορά αυτή να συμφέρει το πρακτορείο και πόσοι για να συμφέρει τους μαθητές;»

Προτείνεται στους μαθητές να ξεκινήσουν την διερεύνηση του προβλήματος με τον υπολογισμό του κόστους για μερικές συγκεκριμένες τιμές συμμετοχής π.χ. 100, 101, 102, 103, ..., 120, .....150. Αναμένεται να συμπεράνουν από την μικρή διερεύνηση πού έκαναν ότι το κέρδος του πρακτορείου είναι κυμαινόμενο (δεν αυξάνεται ανάλογα με τον αριθμό των μαθητών) και επομένως απαιτείται μια πιο συστηματική αντιμετώπιση του θέματος. Στη συνέχεια αποφασίζουν να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις που απέκτησαν στα Μαθηματικά (μελέτη πολυωνυμικής συνάρτησης β' βαθμού, εύρεση ακροτάτων κ.πλ.) για να δημιουργήσουν μια συνάρτηση του κόστους της εκδρομής σε συνάρτηση με τον αριθμό των συμμετεχόντων μαθητών και σύμφωνα με τους όρους της προσφοράς του πρακτορείου, την οποία θα διερευνήσουν ως προς τα ακρότατά της. Στο σημείο αυτό θα ήταν σκόπιμο ο καθηγητής να προτείνει η διερεύνηση να γίνει από κάποιες ομάδες «παραδοσιακά» (δηλ. μόνο με μολύβι και χαρτί) και από άλλες ομάδες με την χρήση εκπαιδευτικού υλικού και στο τέλος, αφού παρουσιαστούν και οι δυο προσεγγίσεις του θέματος να συγκριθούν τα αποτελέσματα και να σχολιαστούν οι δύο μέθοδοι προσέγγισης. Μια ενδεχόμενη πορεία για την παρουσίαση και την διερεύνηση του προβληματισμού της δραστηριότητας υποδεικνύεται στους μαθητές μέσω ενός φύλλου εργασίας.

### **Φύλλο εργασίας** ( πιθανόν σε μορφή Power Point)

Στην περίπτωση που οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με την χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού προτείνεται εδώ να παρεμβληθεί η Β' Φάση.

### **Β' Φάση: Παρουσίαση του εκπαιδευτικού λογισμικού**

Ακολουθεί μια σύντομη παρουσίαση του εκπαιδευτικού λογισμικού Function Probe ή Sketchpad και επιχειρείται η εξοικείωση των μαθητών με τις βασικές λειτουργίες του.

### **3. Το κινητό τηλέφωνο: επιλογή οικονομικού προγράμματος σύνδεσης και εταιρίας**

**3.1. Προβληματισμός:** Όταν οι προσφορές των εταιρειών κινητής τηλεφωνίας υπόσχονται όλο και περισσότερο δωρεάν χρόνο ομιλίας ή μικρότερα ποσά για το πάγιο του μηνιαίου λογαριασμού, είναι φανερό να διερωτάται κανείς για το είδος της επιλογής που πρέπει να κάνει με σκοπό να πληρώνει όσο το δυνατό λιγότερα χρήματα για να καλύψει τις συγκεκριμένες τηλεπικοινωνιακές του ανάγκες. Με ποιο τρόπο, λοιπόν, θα μπορούσε να επιλέξει το συμφερότερο πρόγραμμα σύνδεσης από τα προσφερόμενα;

#### **3.2. Εμπλεκόμενα Μαθήματα:**

- Μαθηματικά
- Πληροφορική

#### **3.3. Διδακτικοί στόχοι:**

- Χρήση γραφικών παραστάσεων γραμμικών συναρτήσεων για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.
- Ανάδειξη της χρησιμότητας αξιοποίησης των Νέων Τεχνολογιών στην διδακτική πράξη. Χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού και στοχευμένη αναζήτηση στο διαδίκτυο.

#### **3.4. Εκτιμώμενη διάρκεια:** 6-10 διδακτικές ώρες

#### **3.5. Διεξαγωγή της δραστηριότητας:**

- **Α' Φάση: Το θέμα και το πλαίσιο της δραστηριότητας**  
Αρχικά ο καθηγητής ενημερώνει τους μαθητές για τον προβληματισμό της

ερευνητικής δράσης που θα εκτελέσουν καθώς και για τον τρόπο και την προτεινόμενη μεθοδολογία που θα ακολουθήσουν στην διεκπεραίωση της. Συγκεκριμένα τους προτείνει την διερεύνηση του ακόλουθου προβλήματος:

«Δεδομένου ότι οι εταιρείες κινητής τηλεφωνίας προσφέρουν πληθώρα οικονομικών προγραμμάτων σύνδεσης με μεγάλη ποικιλία επιλογών (προγράμματα με πάγιο μηνιαίο λογαριασμό που περιλαμβάνουν δωρεάν χρόνο ομιλίας ή/και δωρεάν ορισμένο αριθμό γραπτών μηνυμάτων και συγκεκριμένη χρέωση μετά την παρέλευση του δωρεάν χρόνου ομιλίας ή του δωρεάν αριθμού γραπτών μηνυμάτων, προγράμματα χωρίς δωρεάν παροχές αλλά με χαμηλότερες χρεώσεις για τον χρόνο ομιλίας και τα γραπτά μηνύματα, κ.λπ.) είναι φανερό να διερωτάται κανείς για το είδος της επιλογής που πρέπει να κάνει με σκοπό να πληρώνει όσο το δυνατό λιγότερα χρήματα για να καλύψει τις συγκεκριμένες τηλεπικοινωνιακές του ανάγκες. Με ποιο τρόπο, λοιπόν, θα μπορούσε να επιλέξει το συμφερότερο πρόγραμμα σύνδεσης από τα προσφερόμενα;»

Επισημαίνεται στους μαθητές ότι η μεγάλη ποικιλία προγραμμάτων μας οδηγεί στην θέσπιση κάποιων κριτηρίων για την επιλογή του κατάλληλου οικονομικού προγράμματος σύνδεσης.

Αξιοποιώντας και την προηγούμενη εμπειρία τους από την χρήση κινητού τηλεφώνου, οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι σημαντικό ρόλο στην επιλογή του κατάλληλου οικονομικού προγράμματος σύνδεσης παίζουν το μηνιαίο κόστος του και το είδος της χρήσης (υπηρεσίες φωνής, γραπτά μηνύματα, μεταφορά δεδομένων, κ.λπ.).

Για μηνιαίο ποσό που μπορούν να διαθέσουν, οι μαθητές θα επιλέξουν ένα λογικό σχετικά μικρό ποσό της τάξης των 15-20 ευρώ. Για το είδος της χρήσης του κινητού, οι μαθητές θα μπορούσαν να οργανώσουν μια μικρή έρευνα όπως προτείνεται στο ακόλουθο ενδεικτικό ΦΕ.

## **Φύλλο εργασίας**

Οι γονείς σου αποφάσισαν να σου αγοράσουν ένα κινητό τηλέφωνο και να διαθέσουν 20 ευρώ το μήνα για τη χρήση του. Η εταιρεία κινητής τηλεφωνίας διαθέτει δυο προγράμματα σύνδεσης σύμφωνα με το επόμενο πίνακα

	Χρέωση Ομιλίας	Γραπτά Μηνύματα
Πρόγραμμα Α	0,33€/min	0,1450€/SMS
Πρόγραμμα Β	0,45€/ min	0,1136€/SMS

**1.** Αν επιλέξεις μόνο υπηρεσίες φωνής ποιό πρόγραμμα σε συμφέρει; Ποιος είναι ο μέγιστος χρόνος που σου παρέχει αυτό το πρόγραμμα;  
 .....  
 .....  
 .....

**2.** Αν επιλέξεις να στέλνει μόνο γραπτά μηνύματα ποιό πρόγραμμα σε συμφέρει; Πόσα γραπτά μηνύματα σου επιτρέπει να στείλεις αυτό το πρόγραμμα;  
 .....  
 .....  
 .....

**3.** Αν τελικά μιλάς μία ώρα το μήνα πόσα γραπτά μηνύματα μπορείς να στείλεις χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα Α και πόσα χρησιμοποιώντας το Β;  
 .....  
 .....  
 .....

**4.** Αν  $x$  είναι ο αριθμός των λεπτών ομιλίας και  $y$  ο αριθμός των γραπτών μηνυμάτων που μπορείς να χρησιμοποιήσεις ξοδεύοντας 20€, να γράψεις μία εξίσωση για κάθε πρόγραμμα.

.....  
.....  
.....

**5.** Να παραστήσεις γραφικά τις δυο εξισώσεις στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

**6.** Που τέμνονται οι δυο γραφικές παραστάσεις; Τι παριστάνει το σημείο τομής τους;

.....  
.....  
.....

**7.** Ποιό πρόγραμμα θα επιλέξεις τελικά; Προσπάθησε να δικαιολογήσεις μαθηματικά την επιλογή σου.

.....  
.....  
.....

Στην συνέχεια ο καθηγητής θα χωρίσει την τάξη σε ομάδες των 4-6 μαθητών φροντίζοντας σε κάθε ομάδα να υπάρχει 1 τουλάχιστον μαθητής εξοικειωμένος με την χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού. Στην περίπτωση που οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με την χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού προτείνεται εδώ να παρεμβληθεί η Β' Φάση.

- **Β' Φάση: Παρουσίαση του εκπαιδευτικού λογισμικού**  
Ακολουθεί μια σύντομη παρουσίαση του εκπαιδευτικού λογισμικού Function

Probe ή Sketchpad και επιχειρείται η εξοικείωση των μαθητών με τις βασικές λειτουργίες του.

• **Γ' Φάση: Συλλογή και παρουσίαση δεδομένων**

Οι συγκρίσεις μεταξύ όλων των προσφερομένων προγραμμάτων σύνδεσης κινητής τηλεφωνίας, απαιτεί μια ολοκληρωμένη εικόνα. Με τη συζήτηση διαφόρων απόψεων για τις ενέργειες που πρέπει να γίνουν (π.χ. η προμήθεια διαφημιστικών φυλλαδίων, η πληροφόρηση από προμηθευτές με τηλεφωνική ή φυσική επικοινωνία, η χρήση του διαδικτύου κ.λπ.), ο διδάσκων οδηγεί, με διαλεκτικό τρόπο, στην επιλογή της βέλτιστης δυνατής πληροφόρησης, με κριτήρια την πληρότητα και την πρακτικότητα. Ας υποθέσουμε ότι πραγματοποιείται, από τους μαθητές, η αναζήτηση των αναγκαίων πληροφοριών από το **διαδίκτυο**, ως προσφορότερου μέσο πληροφόρησης. Η παρουσίαση των στοιχείων, σε **λογιστικά φύλλα**, δεδομένου ότι δεν προσφέρονται σε ενιαία μορφή, είναι μια ενέργεια που απαιτεί μια προσπάθεια όχι μόνο τεχνική αλλά και νοητική, διότι η ομογενοποίησή τους είναι αναγκαία προκειμένου να επιτευχθεί οποιαδήποτε απόπειρα σύγκρισης. Η δράση αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική διότι αναγκάζει τους διδασκόμενους να προβληματιστούν, να επινοήσουν κριτήρια, να διαχωρίσουν τα ουσιώδη από τα επουσιώδη, να κατανοήσουν το νόημα των δεδομένων, να αντιμετωπίσουν προβλήματα, όπως αυτά που έχουν σχέση με μετατροπή και εύρεση κοινών μονάδων μέτρησης κ.λπ. και τέλος να χρησιμοποιήσουν τα κριτήρια που έχουν επιλέξει σε προηγούμενη φάση προκειμένου να αποφασίσουν τα προς σύγκριση οικονομικά προγράμματα. Θα ήταν σκόπιμο ο καθηγητής να προτείνει κάθε ομάδα μαθητών να συλλέξει δεδομένα από μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας και μια ομάδα να συλλέξει δεδομένα ομοειδών προγραμμάτων διαφορετικών εταιρειών κινητής τηλεφωνίας.

**Μια ενδεικτική παρουσίαση δεδομένων αποτελεί ο παρακάτω πίνακας:**

		C0	CB	CA15	ΚΣ15
--	--	----	----	------	------



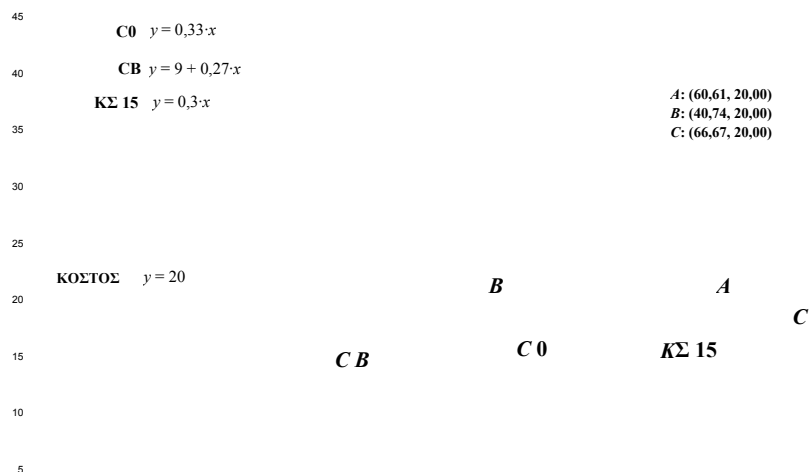
ΜΗΝ. ΠΑΓΙΟ		<b>0€</b>	<b>9€</b>	<b>15€</b>	<b>15€</b>
ΔΩΡΕΑΝ ΧΡΟΝΟΣ ΟΜΙΛΙΑΣ €/min	ΠΡΟΣ C ΠΡΟΣ ΑΛΛΟΥΣ	-	-	<b>1500</b> <b>15</b>	
ΔΩΡΕΑΝ SMS €/SMS	ΠΡΟΣ C ΠΡΟΣ ΑΛΛΟΥΣ	-	-	<b>1500</b> <b>100</b>	-
ΚΟΣΤΟΣ ΚΛΗΣΗΣ €/min		<b>0,33</b>	<b>0,27</b>	<b>0,33</b>	<b>0,30</b>
ΚΟΣΤΟΣ SMS €/SMS		<b>0,1240</b>	<b>0,1240</b>	<b>0,1250</b>	<b>0,1136</b>
ΔΙΑΘΕΣΙΜΟ ΠΟΣΟ					<b>15€</b>

Από αυτή την παρουσίαση προκύπτει ότι κάθε προσφερόμενο πρόγραμμα σύνδεσης κινητής τηλεφωνίας έχει μερικά σημαντικά δεδομένα: το μηνιαίο πάγιο, τα «δωρεάν» λεπτά χρόνου ομιλίας, τα «δωρεάν» γραπτά μηνύματα, την τιμή του χρόνου ομιλίας ανά λεπτό και την τιμή του γραπτού μηνύματος. Είναι φανερό ότι απαιτείται να βρεθεί η σχέση που υπάρχει μεταξύ χρόνου και κόστους, η οποία απαιτεί την ομογενοποίηση των δεδομένων.

- **Δ' Φάση: Μαθηματική επεξεργασία των δεδομένων**

Μετά την συλλογή και παρουσίαση των δεδομένων σε πίνακες στην προηγούμενη φάση, οι μαθητές θα πρέπει να αποφασίσουν τη μέθοδο επεξεργασίας τους. Υπό την καθοδήγηση του καθηγητή και λόγω της πληθώρας των επιλογών που προσφέρονται από τις εταιρείες κινητής τηλεφωνίας οι μαθητές κατευθύνονται προς την γραφική αναπαράσταση των συλλεχθέντων δεδομένων, αξιοποιώντας τις γνώσεις τους για τις συναρτήσεις από τα Μαθηματικά καθώς και τις δυνατότητες αναπαράστασης των εκπαιδευτικών λογισμικών που χειρίζονται. Συγκεκριμένα, αποφασίζουν να δημιουργή-

σους συναρτησιακούς τύπους που συσχετίζουν το μηνιαίο κόστος  $y$  του λογαριασμού του κινητού με τον χρόνο ομιλίας  $x$  για τα διάφορα οικονομικά προγράμματα που κατέγραψαν. Κατά την διαδικασία αυτή, οι μαθητές, προκειμένου να οδηγηθούν σε απλούστερες μαθηματικές σχέσεις που θα μπορούν στη συνέχεια να διαχειριστούν, επιλέγουν μόνο εκείνα τα χαρακτηριστικά των προγραμμάτων που θα χρησιμοποιήσουν περισσότερο ή και αποκλειστικά και δεν λαμβάνουν υπόψη επιλογές που δεν πρόκειται να χρησιμοποιήσουν καθόλου ή μόνο σπάνια π.χ. χρόνος ομιλίας ή γραπτά μηνύματα προς δίκτυα του εξωτερικού. Στη συνέχεια παριστάνουν γραφικά όλες τις συναρτήσεις που δημιούργησαν στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων όπου ο οριζόντιος άξονας  $x'Ox$  παριστάνει τον χρόνο ομιλίας και ο άξονας  $y'Oy$  παριστάνει το μηνιαίο κόστος. οι μαθητές, μετά από συζήτηση μεταξύ τους και ενδεχομένως μετά από υπόδειξη του καθηγητή τους, αποφασίζουν να σχεδιάσουν μια ευθεία παράλληλη στον άξονα  $y'Oy$  διερχόμενη από το σημείο του άξονα  $y'Oy$  που αντιστοιχεί στο επιθυμητό μηνιαίο κόστος λογαριασμού π.χ. 20€ η οποία θα τέμνει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων κόστους. Οι τετμημένες των σημείων αυτών παριστάνουν τους χρόνους ομιλίας των διαφόρων οικονομικών προγραμμάτων για το συγκεκριμένο μηνιαίο κόστος.



Τέλος, αναμένεται από τους μαθητές να επιλέξουν με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση και τα κριτήρια που έχουν επιλέξει σε προηγούμενη φάση της δραστηριότητας το επιθυμητό γι' αυτούς οικονομικό πρόγραμμα.

Ζητείται τέλος, από τους μαθητές να αποτυπώσουν τις διερευνήσεις τους, τα αρχεία του FP με τους πίνακες δεδομένων και τα γραφήματα και τα συμπεράσματα τους σε ηλεκτρονική μορφή (π.χ. αρχεία Power Point), υλικό που θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο αξιολόγησης με κριτήρια την σαφήνεια, την συλλογιστική ικανότητα, την ικανότητα συμπερασμού και την συλλογική συμμετοχή των μελών της ομάδας.

- **Ε' Φάση: Γενικά σχόλια**

Ζητείται από τους μαθητές να διατυπώσουν τα σχόλιά τους και τις παρατηρήσεις τους για την διαδικασία μαθηματοποίησης ενός πραγματικού προβλήματος και την συμβολή της χρήσης ενός εκπαιδευτικού λογισμικού στην διερεύνηση του προβλήματος.

## **ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ**

### **A) Βαθμός από την Ερευνητική Εργασία, με βάση την «ομαδοσυνεργατικότητα».**

Ο Φάκελος που θα καταθέσει το «Τμήμα Ενδιαφέροντος», θα αξιολογείται ως συλλογικό δημιούργημα και θα δίνει σε κάθε μαθητή και κάθε μαθήτριά του το βαθμό που του/της αναλογεί και θα προκύπτει από τις παρατηρήσεις των εκπαιδευτικών που θα το αναλάβουν. Οι παρατηρήσεις των εκπαιδευτικών θα αφορούν:

- α) στη συμμετοχή των παιδιών στη λειτουργία των ομάδων
- β) στην ποιότητα των δημιουργημάτων τους στα χαρτόνια εργασίας
- γ) στην ερμηνεία και το σχολιασμό κειμένων
- δ) στην συλλογή, επεξεργασία, παρουσίαση και ερμηνεία των εργασιών πεδίου και
- ε) στη συμμετοχή τους στις ολομέλειες με σκέψεις, ιδέες και προβληματισμούς

στ) στην ανάληψη πρωτοβουλιών που θα εξελίσσουν την Ερευνητική Εργασία.

Στη βαθμολογία της Ερευνητικής Εργασίας, με βάση την «ομαδοσυνεργατικότητα», θα συνεκτιμάται και η τελική παρουσίασή της.

## **B) Βαθμός με βάση τις «ατομικές» ερευνητικές πρωτοβουλίες.**

Ο κεντρικός σχεδιασμός της Ερευνητικής Εργασίας έχει κατά βάση «ομαδοσυνεργατικό» χαρακτήρα. Με αυτήν την έννοια, δεν μπορούν να γίνουν εργασίες απ' όπου θα προκύπτει η ατομική αξιολόγηση, πριν ολοκληρωθεί το εγχείρημα, αφού όλες οι ομάδες δουλεύουν με κοινό «πλαίσιο προβληματισμού» ή κοινά ερευνητικά ερωτήματα». Μετά την ολοκλήρωση του εγχειρήματος, όμως, τα παιδιά: **α)** θα έχουν εξοικειωθεί με το βηματισμό «ξεκινώ από ένα πλαίσιο προβληματισμού, αναζητώ πρωτογενείς πληροφορίες ή αναλύω το περιεχόμενο κειμένων, οργανώνω τις πληροφορίες ή τα νοήματα (διακρίνω, κατηγοριοποιώ, ιεραρχώ), εξάγω συμπεράσματα και τα ερμηνεύω κριτικά» και **β)** θα έχουν δουλέψει σε δραστηριότητες που εμπλέκουν τις Φυσικές Επιστήμες και τα Μαθηματικά, τις Κοινωνικές Επιστήμες και τη Γλώσσα, την Τεχνολογία και τις Τέχνες, ασκώντας και αναπτύσσοντας πολλές και διαφορετικές ικανότητες δεξιότητες και ταλέντα. Με αυτήν την έννοια, τα παιδιά θα είναι σε θέση να επιλέξουν, με τη βοήθεια των εκπαιδευτικών τους, ένα δικό τους μικρό και απλό «πλαίσιο προβληματισμού» (συμβατό με τα ενδιαφέροντά τους) και να προχωρήσουν σε μικρές, απλές και πρωτότυπες «Ερευνητικές Εργασίες» είτε μόνα τους είτε σε ομάδες δύο, τριών ή τεσσάρων ατόμων.

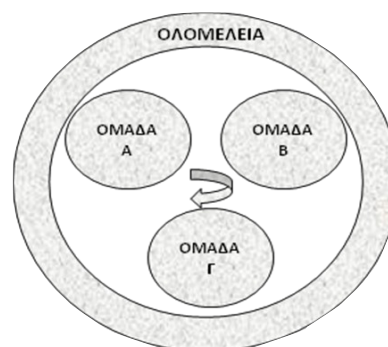
Οι ερευνητικές αυτές εργασίες θα μπορούν **α)** να κινούνται σε όποιο από τα πεδία διέτρεξε ο κεντρικός σχεδιασμός και η υλοποίηση της Ερευνητικής Εργασίας και **β)** να εκφράζονται σε όποια μορφή και με όποιο μέσο επιθυμούν οι έφηβοι και οι έφηβες ερευνητές και ερευνήτριες. Έτσι, κάθε παιδί, από μόνο του ή από κοινού με ένα, δυο ή τρία άλλα, θα καταθέτουν **έναν ακόμα Φάκελο**, ο οποίος θα βαθμολογείται από τους εκπαιδευτικούς.

### **Περιεχόμενο Ομαδικού Φακέλου:**

- α) Έκθεση Ερευνητικής Εργασίας σε ηλεκτρονική (action power point) ή έντυπη μορφή με όλα τα δημιουργήματα των παιδιών
- β) επιμέρους έρευνες, αποτελέσματα, κριτική ερμηνεία

### **Περιεχόμενο Ατομικού Φακέλου:**

- Έκθεση πρωτότυπης έρευνας
- σε ηλεκτρονική ή έντυπη μορφή



## Πρόσθετα πιθανά θέματα δραστηριοτήτων

### 1. Το πέτρινο μονοπάτι

**Προβληματισμός:** Ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν την πλακόστρωση ενός μονοπατιού με συγκεκριμένο αριθμό διαθέσιμων κυκλικών πλακιδίων από την είσοδο του γειτονικού πάρκου μέχρι το σιντριβάνι που βρίσκεται στο κέντρο του πάρκου. Κατά την επεξεργασία του θέματος ανακύπτουν περιορισμοί πραγματικής φύσης (π.χ. μέγιστη δυνατή απόσταση των πλακιδίων) που οδηγούν σε τροποποίηση της δραστηριότητας.

### 2. Ο παραγωγός φρούτων

**Προβληματισμός:** Ένας παραγωγός φρούτων αντιμετωπίζει το εξής δίλημμα: αν μαζέψει άμεσα τα φρούτα του θα έχει μια δεδομένη παραγωγή και θα εξασφαλίσει μια δεδομένη τιμή, ενώ αν τα μαζέψει αργότερα (μέσα σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα), θα έχει μικρότερη παραγωγή αλλά θα τα πουλήσει ακριβότερα. Ζητείται από τους μαθητές να διερευνήσουν ποια χρονική στιγμή τον συμφέρει να πουλήσει τα φρούτα του.

### 3. Ο χώρος στάθμευσης

**Προβληματισμός:** Η διοίκηση ενός εμπορικού κέντρου εξετάζει πέντε διαφορετικούς τρόπους χρέωσης για τη χρήση του χώρου στάθμευσης του

εμπορικού κέντρου. Η διοίκηση θα ήθελε φυσικά να κερδίσει όσο το δυνατόν περισσότερα χρήματα, χωρίς όμως να χάσει τους πελάτες του εμπορικού κέντρου. Προκειμένου δε να εξασφαλιστεί ότι ο χώρος στάθμευσης θα είναι ελεύθερος, για να χρησιμοποιείται από τους ιδιοκτήτες των καταστημάτων και όχι από τους ανθρώπους που εργάζονται στην πόλη, το συμβούλιο όρισε ως μέγιστο χρόνο παραμονής στον χώρο για οποιονδήποτε πελάτη του εμπορικού κέντρου, τις πέντε ώρες.

#### 4. Μεταβολή της διάρκειας της ημέρας

**Προβληματισμός:** Με την δραστηριότητα αυτή επιχειρείται η μαθηματική μοντελοποίηση του φυσικού φαινομένου της μεταβολής της διάρκειας της ημέρας (το χρονικό διάστημα ανάμεσα στην Ανατολή και τη Δύση του Ηλίου) κατά το πέρασμα του χρόνου. Είναι γνωστό ότι η διάρκεια της ημέρας σε ένα τόπο εξαρτάται από την θέση του πάνω στην γήινη σφαίρα και από την εποχή του έτους.

**ΤΕΛΟΣ**