Τι ονομάζουμε γραμμικό σύστημα 2x2;

Δύο γραμμικές εξισώσεις $ax+\beta y=\gamma$ και $\alpha' x+\beta' y=\gamma'$ για τις οποίες αναζητάμε την τις κοινές του λύσεις λέμε ότι αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους (2x2) και γράφουμε

$$\begin{cases} ax+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$$

Παραδείγματα γραμμικών συστημάτων 2x2:

$$\begin{cases} 2x+3y=-2 \\ -x+2y=13 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y=5 \\ x-y=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{3}-2y=\frac{1}{2} \\ x-\frac{2}{5}y=\sqrt{2} \end{cases}$$

Τι ονομάζουμε λύση ενός γραμμικού συστήματος 2x2;

Λύση του γραμμικού συστήματος $\begin{cases} ax+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$, λέμε κάθε ζεύγος αριθμών (x_0,y_0) που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος

Παραδείγματα:

Το σύστημα $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ -x+2y=-3 \end{cases}$

έχει λύση το ζεύγος $(x,y)=(1,-1)$ γιατί θέτοντας $x=1$ και $y=-1$ έχω

$$\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ -x+2y=-3 \end{cases} \overset{x=1,y=-1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2\cdot 1+3\cdot(-1)=-1 \\ -1+2\cdot(-1)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3=-1 ☑ \\ -1-2=-3 ☑ \end{cases}$$

<u>ΔΕΝ</u> έχει λύση το ζεύγος $(x,y)=(5,1)$ γιατί θέτοντας $x=5$ και $y=1$ έχω

$$\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ -x+2y=-3 \end{cases} \overset{x=5,y=1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2\cdot 5+3\cdot 1=-1 \\ -5+2\cdot 1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10+3=-1 ☒ \\ -5+2=-3 ☑ \end{cases}$$

Πότε δύο γραμμικά συστήματα λέγονται ισοδύναμα;

Δύο γραμμικά συστήματα λέγονται ισοδύναμα όταν έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις.

Τι λέμε επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2x2;

Επίλυση ενός γραμμικού συστήματος λέμε την διαδικασία που ακολουθούμε, ώστε να βρούμε την λύση του συστήματος. Η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος γίνεται με κατάλληλη μετατροπή του σε άλλο ισοδύναμο γραμμικό σύστημα.
Η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος μπορεί να γίνει:

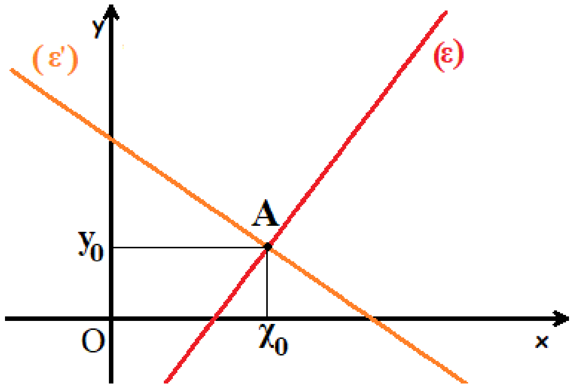
1. Γραφικά
2. Με την μέθοδο της αντικατάστασης
3. Με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών
4. Με ορίζουσες.

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος 2x2;

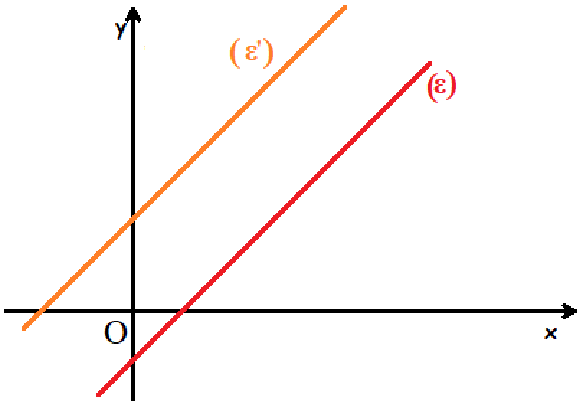
Οι δύο εξισώσεις του γραμμικού συστήματος 2x2 $\begin{cases} ax+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$, παριστάνουν δύο ευθείες (ε) και (ε'), οι οποίες μπορεί να τέμνονται ή να είναι παράλληλες ή να συμπίπτουν.

Βήμα 1ο. Σχεδιάζουμε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy τις ευθείες (ε) και (ε') που αντιστοιχούν σε κάθε μια από τις δύο γραμμικές εξισώσεις του συστήματος.
Βήμα 2ο. Ανάλογα με την σχετική θέση των δύο ευθείων έχουμε και την λύση. Συγκεκριμένα:

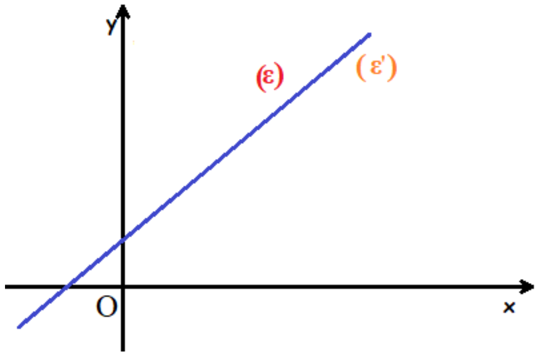
- Αν οι ευθείες (ε): $ax+\beta y=\gamma$ και (ε'): $\alpha' x+\beta' y=\gamma'$ **τέμνονται** τότε το σύστημα $\begin{cases} ax+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$ έχει **μοναδική λύση** την $(x,y)=(x_0,y_0)$ όπου (x_0,y_0) είναι οι συντεταγμένες του **σημείου τομής** Α των ευθειών (ε) και (ε').



- Αν οι ευθείες (ε): $ax+\beta y=\gamma$ και (ε'): $\alpha' x+\beta' y=\gamma'$ είναι **παράλληλες** τότε το σύστημα $\begin{cases} ax+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$ είναι **αδύνατο**.

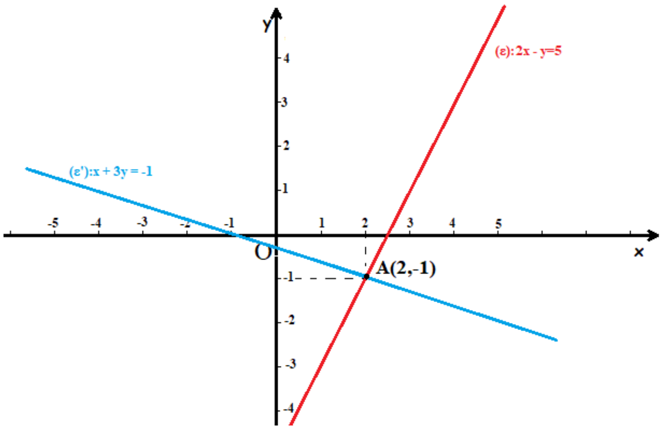


- Αν οι ευθείες (ε): $ax+\beta y=\gamma$ και (ε'): $\alpha' x+\beta' y=\gamma'$ **συμπίπτουν** τότε το σύστημα $\begin{cases} ax+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$ έχει **άπειρες λύσεις**.



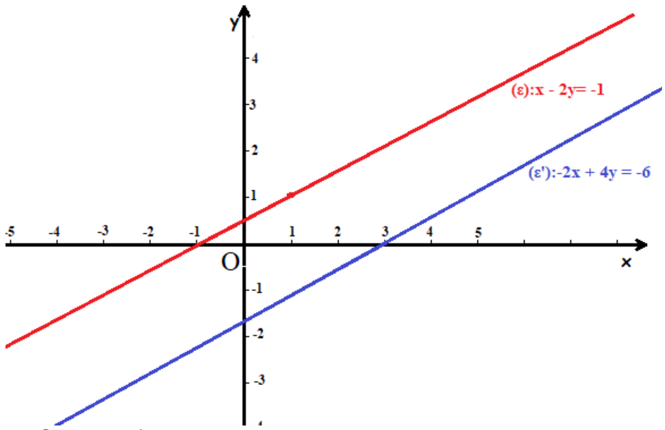
Παραδείγματα:

- Το σύστημα $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση γιατί οι συντελεστές διεύθυνσης των δύο ευθείων είναι αντίστοιχα $\lambda = 2$ και $\lambda' = -\frac{1}{3}$, διαφορετικοί μεταξύ τους άρα οι δύο ευθείες τέμνονται.

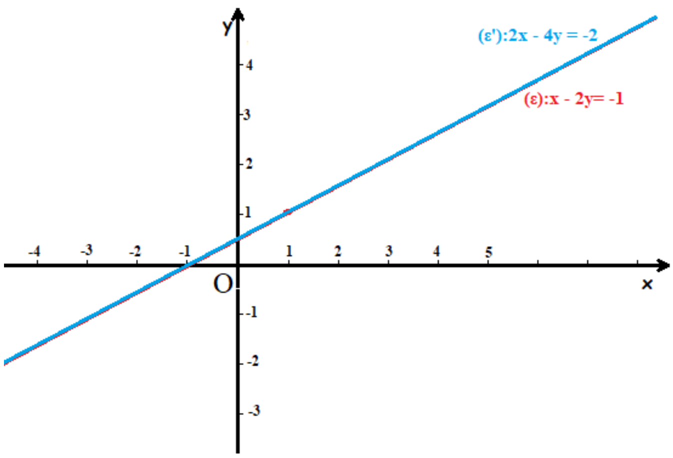


Η μοναδική λύση του συστήματος είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών $A(2,-1)$. Δηλαδή $(x,y) = (2,-1)$

- Το σύστημα $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -2x + 4y = -6 \end{cases}$ είναι αδύνατο γιατί οι συντελεστές διεύθυνσης των δύο ευθείων είναι αντίστοιχα $\lambda = \frac{1}{2}$ και $\lambda' = \frac{1}{2}$, ίσοι μεταξύ τους άρα οι δύο ευθείες είναι παράλληλες.



- Το σύστημα $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις γιατί οι δύο ευθείων συμπίπτουν.



Στην περίπτωση αυτή οι λύσεις του συστήματος είναι οι συντεταγμένες όλων των σημείων της ευθείας $x - 2y = -1$. Η εξίσωση $x - 2y = -1$ γράφεται $x = 2y - 1$. Αρά οι λύσεις του συστήματος είναι κάθε ζεύγος της μορφής: $(\kappa, 2\kappa - 1), \kappa \in \mathbb{R}$.

Επίλυση συστήματος 2x2 με την μέθοδο της <u>αντικατάστασης</u>.

<u>Μεθοδολογία</u>:

- ✓ Λύνουμε την μία από τις δύο εξισώσεις ως προς τον ένα άγνωστο.
- ✓ Αντικαθιστούμε στην δεύτερη εξίσωση και έτσι προκύπτει εξίσωση με ένα άγνωστο. Λύνουμε την εξίσωση και βρίσκουμε τον ένα άγνωστο.
- ✓ Αντικαθιστώντας την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε, στην πρώτη εξίσωση και υπολογίζουμε και τον άλλο άγνωστο

1) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x-2y=6 \\ 3x+4y=8 \end{cases}$

$$\begin{cases} x-2y=6 \\ 3x+4y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+6 \\ 3x+4y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+6 \\ 3(2y+6)+4y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+6 \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=4 \\ y=-1 \end{matrix}$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x,y)=(4,-1)$

Παρατήρηση:

1. Μπορούμε να επιλέξουμε όποια εξίσωση από τις δύο θέλουμε.
2. Μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση ως προς όποιον άγνωστο θέλουμε.

2)Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} -3x-6y=2 \\ x+2y=-1 \end{cases}$

$$\begin{cases} -3x-6y=2 \\ x+2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-6y=2 \\ x=-2y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3(-2y-1)-6y=2 \\ x=-2y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0y=-1 \\ x=-2y-1 \end{cases}$$

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος είναι αδύνατή

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

3)Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 2x-y=-1 \ (1) \\ 4x-2y=-2 (2) \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 4x-2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ 4x-2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ 4x-2(2x+1)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ 0x=0 \end{cases}$$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος είναι ταυτότητα.

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Για να βρω την μορφή των λύσεων, παίρνουμε την εξίσωση $y=2x+1$ και θέτουμε $y=\kappa$.
Άρα οι λύσεις είναι της μορφής $(x,y)=(\kappa,2\kappa+1), \kappa \in \mathbb{R}$

Επίλυση συστήματος 2x2 με την μέθοδο των <u>αντίθετων συντελεστών</u>.

<u>Μεθοδολογία</u>:

- ✓ Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των δύο εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς, ώστε να προκύψουνε εξισώσεις στις οποίες οι συντελεστές του ενός αγνώστους να είναι αντίθετοι.
- ✓ Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις και έτσι προκύπτει εξίσωση με ένα άγνωστο. Λύνουμε την εξίσωση και βρίσκουμε τον ένα άγνωστο.
- ✓ Αντικαθιστώντας την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε, σε μια από τις αρχικές εξισώσεις, υπολογίζουμε και τον άλλο άγνωστο.

1) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} -2x+y=-1 \\ 2x-5y=-3 \end{cases}$

$$\begin{cases} -2x+y=-1 \\ 2x-5y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y=-1 \\ -4y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y=-1 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1=-1 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x,y)=(1,1)$

2) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x+2y=12 \\ 2x-3y=-11 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+2y=12 \\ 2x-3y=-11 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+6y=36 \\ 4x-6y=-22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+6y=36 \\ 7x=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=2\cdot 2+1 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ x=2 \end{cases}$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x,y)=(2,5)$

Τι λέμε ορίζουσα.

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ονομάζουμε ορίζουσα (2ης τάξης) το σύμβολο $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ το οποίο ισούται με $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}=\alpha\delta-\beta\gamma$

Παραδείγματα:

- $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=3\cdot 7-2\cdot 5=21-10=11$
- $\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=-2\cdot 7-5\cdot 6=-14-30=-44$
- $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}=1\cdot 10-(-2)\cdot 4=10+8=18$
- $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=2\cdot 6-3\cdot 4=12-12=0$

Επίλυση συστήματος 2x2 με την μέθοδο των <u>οριζουσών</u>.

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} ax+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$ με την μέθοδο των οριζουσών.

- ✓ Αρχικά υπολογίζουμε τις ορίζουσες:

  την ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος $D=\begin{vmatrix} a & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$

  και τις $D_x=\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}$ και $D_y=\begin{vmatrix} a & \gamma \\ a' & \gamma' \end{vmatrix}$
- ✓ Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

  Αν $D\neq 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)$

  Αν $D=0$ τότε το σύστημα είναι ή αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

1) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} -x+y=-1 \\ 3x+2y=2 \end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-1\cdot 2-1\cdot 3=-5\neq 0$, $D_x=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-4$ και $D_y=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1$

Αφού $D\neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{-4}{-5},\frac{1}{-5}\right)=\left(\frac{4}{5},-\frac{1}{5}\right)$

2) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \sqrt{2}x+y=-1 \\ 2x+\sqrt{2}y=2 \end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-1\cdot 2=2-2=0$ άρα το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση του συστήματος με το $\sqrt{2}$ το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} \sqrt{2}x+y=-1 \\ 2x+\sqrt{2}y=2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}x+\sqrt{2}\cdot y=\sqrt{2}\cdot(-1) \\ 2x+\sqrt{2}y=2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x+\sqrt{2}\cdot y=-\sqrt{2} \\ 2x+\sqrt{2}y=2 \end{cases}$$

το τελευταίο προφανώς είναι αδύνατο.

3) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} -x+y=-1 \\ 2x-2y=2 \end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-1\cdot(-2)-1\cdot 2=2-2=0$ άρα το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση του συστήματος με το -2 το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} -x+y=-1 \\ 2x-2y=2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -2\cdot(-x)+(-2)\cdot y=(-2)\cdot(-1) \\ 2x-2y=2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x-2y=2 \\ 2x-2y=2 \end{cases}$$

το τελευταίο προφανώς έχει άπειρες λύσεις.

Παρατηρήσεις:

1. Η μέθοδος των οριζουσών ενδείκνυται
   α. στην επίλυση συστημάτων με συντελεστές τετραγωνικές ρίζες.
   β. καθώς και στην επίλυση παραμετρικών συστημάτων.
2. Αν $D=0$ τότε για δούμε αν το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις χρησιμοποιούμε μια από τις προηγούμενες μεθόδους.

Επαλήθευση του συστήματος.

Για να ελέγξουμε την λύση ενός συστήματος, που βρήκαμε θα πρέπει να κάνουμε επαλήθευση του συστήματος. Δηλαδή να αντικαταστήσουμε τις τιμές των αγνώστων που βρήκαμε στις αρχικές εξισώσεις του συστήματος και να ελέγχουμε αν τις επαληθεύουν.

Το σύστημα $\begin{cases} -2x+y=5 \\ 3x+2y=-4 \end{cases}$ έχει λύση την $(x,y)=(-2{,}1)$

Πράγματι:

1η εξίσωση: $-2x+y=5 \overset{x=-2\&y=1}{\Leftrightarrow} -2\cdot(-2)+1=5\Leftrightarrow 4+1=5$☑

2η εξίσωση: $3x+2y=-4 \overset{x=-2\&y=1}{\Leftrightarrow} 3\cdot(-2)+2\cdot 1=-4\Leftrightarrow -6+2=-4$☑

Παραμετρικά συστήματα 2x2.

Σε ένα παραμετρικό σύστημα, σε κάποιους από τους συντελεστές και τους σταθερούς όρους εμφανίζεται μια παράμετρος (μια μεταβλητή).

Παραδείγματα παραμετρικών συστημάτων:

$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ 9x + \lambda y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda - 1 \\ \lambda^2 x - 2y = \lambda \end{cases}$ $\begin{cases} 2\alpha x + (2\alpha - 1)y = 1 \\ 2x + \alpha y = \alpha \end{cases}$

Για την επίλυση ενός παραμετρικού συστήματος ακολουθούμε τα εξής:

- Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y και τις φέρνουμε σε μορφή γινομένου (παραγοντοποίηση).
- Λύνουμε την εξίσωση $D = 0$ και βρίσκουμε τις τιμές της παραμέτρου που μηδενίζουν την ορίζουσα D.
- Διακρίνουμε της περιπτώσεις για $D \neq 0$ και για $D = 0$

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ 9x + \lambda y = 3 \end{cases}$

Υπολογίζουμε τις τρις ορίζουσες.

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 9 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = (\lambda + 3)(\lambda - 3)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3\lambda - 9 = 3(\lambda - 3)$$

Λύνουμε την εξίσωση $D = 0$

για $D = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 3)(\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3$ ή $\lambda = 3$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $\lambda \neq -3$ και $\lambda \neq 3$ τότε $D \neq 0$, οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{\lambda - 3}{(\lambda - 3)(\lambda + 3)}, \frac{3(\lambda - 3)}{(\lambda - 3)(\lambda + 3)}\right) = \left(\frac{1}{\lambda + 3}, \frac{3}{\lambda + 3}\right)$$

- Αν $\lambda = -3$ ή $\lambda = 3$ τότε $D = 0$, οπότε το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.
    - Αν $\lambda = -3$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} -3x + y = 1 \\ 9x - 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y = 1 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$ που είναι αδύνατο.
    - Αν $\lambda = 3$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 9x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$ που έχει άπειρες λύσεις της μορφής . $(x, y) = (\kappa, 1 - 3\kappa)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$

Παρατήρηση:

Αν ένα σύστημα δεν είναι στην κανονική του μορφή, τότε πριν χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις παραπάνω μεθόδους για να βρούμε την λύση του, θα πρέπει να το φέρουμε στην κανονική μορφή. Για παράδειγμα το σύστημα $\begin{cases} \frac{2x-1}{3} = 4 - \frac{y+2}{4} \\ \frac{x+3}{2} - 3 = \frac{x-y}{3} \end{cases}$ δεν είναι σε κανονική μορφή.

Αρχικά φέρνουμε το σύστημα στην κανονική του μορφή

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{3} = 4 - \frac{y+2}{4} \\ \frac{x+3}{2} - 3 = \frac{x-y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 \cdot \frac{2x-1}{3} = 12 \cdot 4 - 12 \cdot \frac{y+2}{4} \\ 6 \cdot \frac{x+3}{2} - 6 \cdot 3 = 6 \cdot \frac{x-y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(2x - 1) = 48 - 3(y + 2) \\ 3(x + 3) - 18 = 2(x - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4 = 48 - 3y - 6 \\ 3x + 9 - 18 = 2x - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 3y = 46 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$$

Λύνουμε το τελευταίο σύστημα με όποια μέθοδο θέλουμε.

Γραμμικά συστήματα 3x3.

Γραμμική εξίσωση με 3 αγνώστους λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$.
Λύση μιας τέτοιας εξίσωσης λέμε κάθε τριάδα αριθμών που την επαληθεύει.

Παράδειγμα:
Η εξίσωση $3x - 2y + z = 5$ έχει λύση την $(x, y, z) = (1,0,2)$ γιατί $3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 2 = 5$☑

Όταν έχουμε τρεις γραμμικές εξισώσεις με τρεις αγνώστους:
$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1$, $\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2$, $\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3$
και ζητάμε τις κοινές λύσεις τους, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους** ή, πιο σύντομα, ένα γραμμικό σύστημα **3x3** και γράφουμε: $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3 \end{cases}$

Για την **επίλυση** ενός τέτοιου συστήματος χρησιμοποιούμε μεθόδους ανάλογες με τις μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2 x 2 .

Ένα γραμμικό σύστημα 3x3 ή **έχει μοναδική λύση** ή είναι **αδύνατο** ή έχει **άπειρο πλήθος λύσεων**.