Τι ονομάζουμε μη γραμμικό σύστημα;

Μη γραμμικό σύστημα λέγεται ένα σύστημα που οι εξισώσεις του δεν είναι όλες γραμμικές.

Παραδείγματα μη γραμμικών συστημάτων:

$\begin{cases} x+3y=-2 \\ x^2-2y=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=-2 \\ |x|+y=4 \end{cases}$

Πως επιλύουμε ένα μη γραμμικό σύστημα;

Συνήθως χρησιμοποιούμε την μέθοδο της αντικατάστασης. Συγκεκριμένα επιλύουμε την πιο απλή εξίσωση ως προς ένα άγνωστό και αντικαθιστούμε στις άλλες εξισώσεις.

Παρατήρηση:
Υπό προϋποθέσεις και η γραφική επίλυση είναι ενδιαφέρουσα.

Παραδείγματα μη γραμμικών συστημάτων

1. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$

1ος τρόπος.

Η 1η εξίσωση γράφεται

$$x+y=7 \Leftrightarrow y=7-x \ (1)$$

Αντικαθιστώντας στην 2η έχουμε:

$$xy=12 \Leftrightarrow x(7-x)=12 \Leftrightarrow 7x-x^2=12 \Leftrightarrow -x^2+7x-12=0$$

Η τελευταία είναι δευτεροβάθμια με διακρίνουσα $\Delta=7^2-4\cdot(-1)\cdot(-12)=1$

Επομένως $x=\frac{-7\pm\sqrt{1}}{2\cdot(-1)}=\frac{-7\pm1}{-2}=\begin{cases} x=4 \\ x=3 \end{cases}$

Αντικαθιστούμε στην (1) κάθε τιμή του x που βρήκαμε και υπολογίζουμε και το αντίστοιχο y. Έτσι

Για $x=4$ έχω $y=7-x \underbrace{\Leftrightarrow}_{x=4} y=7-4=3$ Άρα $(x,y)=(4,3)$

Για $x=3$ έχω $y=7-x \underbrace{\Leftrightarrow}_{x=3} y=7-3=4$ Άρα $(x,y)=(3,4)$

2ος τρόπος.

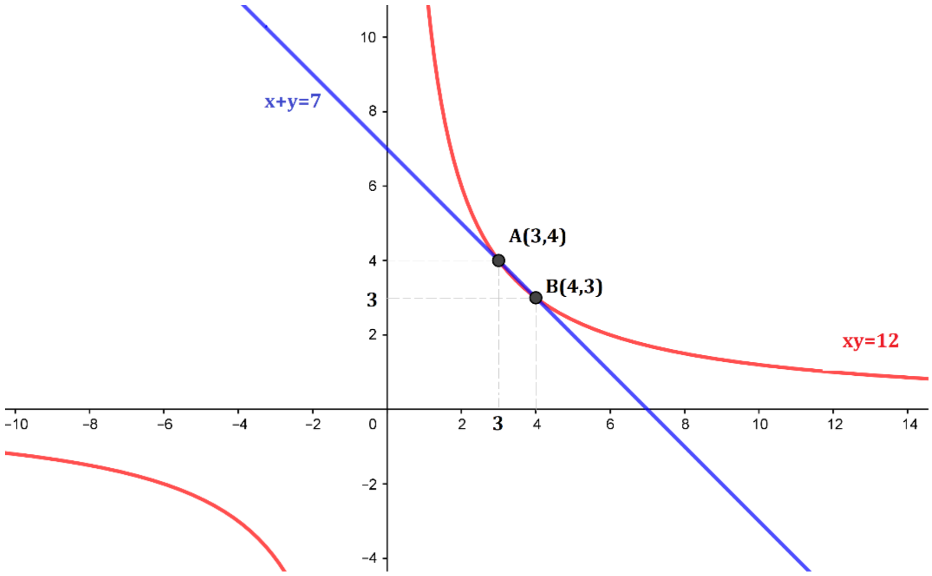
Ψάχνουμε δύο αριθμούς με άθροισμα 7 και γινόμενο 12. Επομένως από τους τύπους του Vieta οι αριθμοί αυτοί θα είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας $\omega^2-7\omega+12=0$. Οι ρίζες της τελευταίας είναι οι αριθμοί 3 και 4. Άρα η λύση του συστήματος είναι τα ζευγάρια $(x,y)=(4,3)$ και $(x,y)=(3,4)$

3ος τρόπος.(Γραφική επίλυση)

Η 1η εξίσωση του συστήματος $x+y=7$ παριστάνει ευθεία.

Η 2η εξίσωση του συστήματος $xy=12 \Leftrightarrow y=\frac{12}{x}$ παριστάνει υπερβολή.

Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα τις παραπάνω γραμμές και οι συντεταγμένες των σημείων τομής τους μας δίνει την λύση του συστήματος.



2. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

<u>1ος τρόπος.</u>

Η 1η εξίσωση γράφεται $2x - y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$ (1)

Αντικαθιστώντας στην 2η έχουμε:

$$x^2 + y^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + (2x)^2 = 5 \Leftrightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Από την (1) και

για $x = 1$ έχω $y = 2$. Άρα $(x, y) = (1,2)$

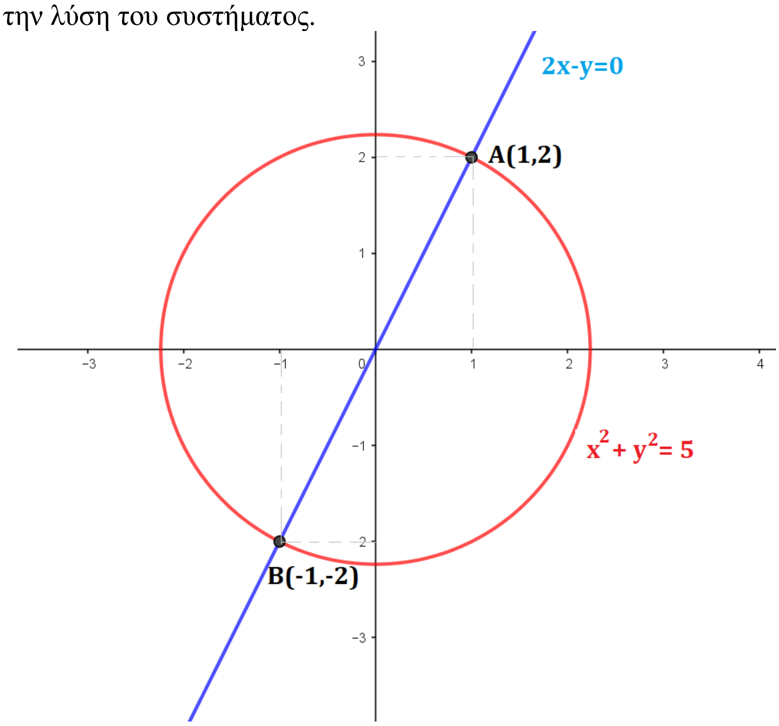
για $x = -1$ έχω $y = -2$. Άρα $(x, y) = (-1, -2)$

<u>2ος τρόπος.(Γραφική επίλυση)</u>

Η 1η εξίσωση του συστήματος $2x - y = 0$ παριστάνει ευθεία.

Η 2η εξίσωση του συστήματος $x^2 + y^2 = 5$ είναι κύκλος κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho = \sqrt{5}$

Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα τις παραπάνω γραμμές και οι συντεταγμένες των σημείων τομής τους μας δίνει την λύση του συστήματος.



3. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} -x+y=2 \\ -x^2+y=0 \end{cases}$

$1^{ος}$ τρόπος.

Η $1^η$ εξίσωση γράφεται $-x+y=2 \Leftrightarrow y=x+2$ (1)

Αντικαθιστώντας στην $2^η$ έχουμε:

$$-x^2+y=0 \Leftrightarrow -x^2+x+2=0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\Delta=9} x=2\,, x=-1$$

Από την (1) και

για $x=2$ έχω $y=4$. Άρα $(x,y)=(2,4)$

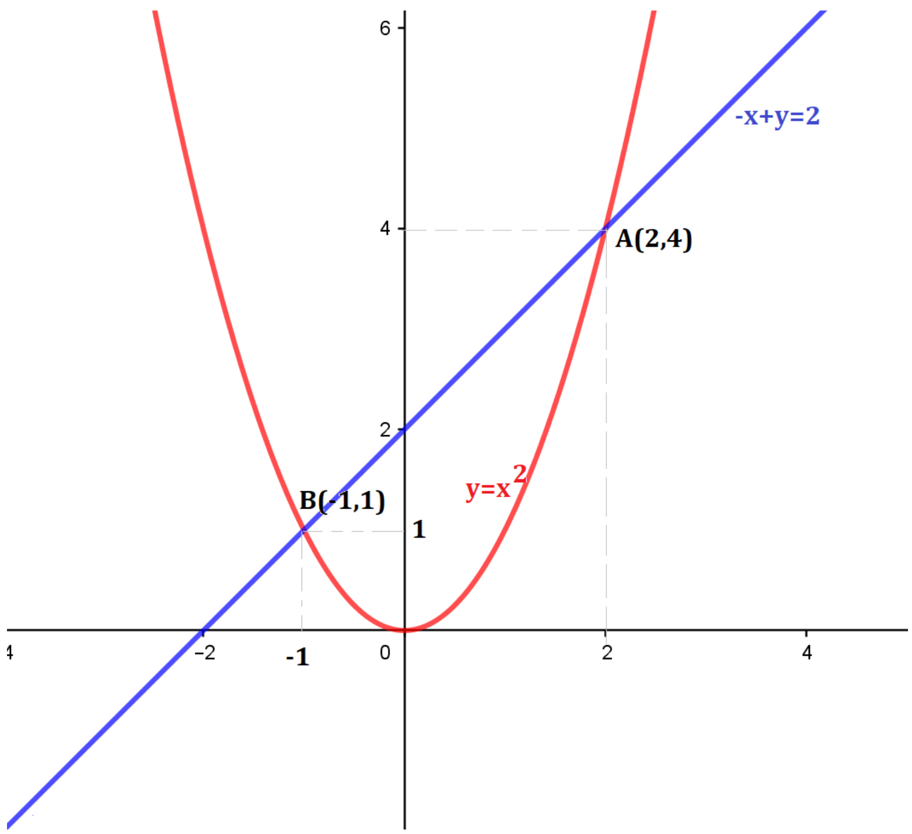
για $x=-1$ έχω $y=1$. Άρα $(x,y)=(-1,1)$

$2^{ος}$ τρόπος.(Γραφική επίλυση)

Η $1^η$ εξίσωση του συστήματος $-x+y=2$ παριστάνει ευθεία.

Η $2^η$ εξίσωση του συστήματος $-x^2+y=0 \Leftrightarrow y=x^2$ είναι μια παραβολή

Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα τις παραπάνω γραμμές και οι συντεταγμένες των σημείων τομής τους μας δίνει την λύση του συστήματος.



4. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = -x^2 + 1 \end{cases}$

1ος τρόπος.

Η 1η εξίσωση γράφεται $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = -y^2 + 1$ (1)

Αντικαθιστώντας στην 2η έχουμε:

$y = -(-y^2 + 1) + 1 \Leftrightarrow y = y^2 - 1 + 1 \Leftrightarrow y^2 - y = 0 \Leftrightarrow y(y-1) = 0 \Leftrightarrow y = 0, y = 1$

Από την (1) και

για $y = 0$ έχω $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Άρα $(x, y) = (1,0)$ και $(x, y) = (-1,0)$

για $y = 1$ έχω $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Άρα $(x, y) = (0,1)$

2ος τρόπος.(Γραφική επίλυση)

Η 1η εξίσωση του συστήματος $x^2 + y^2 = 1$ παριστάνει μοναδιαίο κύκλο κέντρου $O(0,0)$.

Η 2η εξίσωση του συστήματος $y = -x^2 + 1$ είναι μια παραβολή

Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα τις παραπάνω γραμμές και οι συντεταγμένες των σημείων τομής τους μας δίνει την λύση του συστήματος.