

ΘΕΜΑ Α**A1.** Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις ακόλουθες προτάσεις, σαν σωστή (Σ) ή λάθος(Λ)

(μονάδες 6)

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$.
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
3. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και $f(x) \leq g(x)$ «κοντά» στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
4. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 3$ και $f(x) < g(x) < 3$ «κοντά» στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 3$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0$.
6. Αν $f(x) \leq 2024$ «κοντά» στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 2024$

A2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση για κάθε ένα από τα παρακάτω:

(μονάδες 3)

1. Για να αναζητήσουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, πρέπει:
 - A. Το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 - B. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης να είναι ανοικτό διάστημα.
 - Γ. Να ορίζεται η συνάρτηση f όσο «κοντά» θέλουμε στο x_0 .
 - Δ. Το x_0 να μην περιέχεται στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
2. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε για την συνάρτηση f ισχύει, «κοντά» στο x_0 :
 - A. $f(x) > 0$
 - B. $f(x) < 0$
 - Γ. $f(x) = 0$
 - Δ. $f(x) \geq 0$
 - E. Δεν μπορούμε να συμπεράνουμε το πρόσημο της f
3. Αν η συνάρτηση f έχει όριο στο x_0 και $f(x) > 0$ «κοντά» στο x_0 , τότε:
 - A. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$
 - B. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.
 - Γ. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$
 - Δ. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$
 - E. τίποτε από τα προηγούμενα.

A3. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

(μονάδες 6)

1. Αν $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 2$ τότε $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) =$ _____
2. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$ τότε $f(x)$ _____ 0 «κοντά» στο 2.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5\eta\mu x}{x} =$ _____
4. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(3 + h) =$ _____
5. $\lim_{x \rightarrow -3} [f(x) + 5] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -3} f(x) =$ _____
6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2-2x+4)}{2(x-2)} =$ _____

A4. Να χαρακτηρίσετε σαν σωστή ή λάθος καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις δικαιολογώντας την απάντησή σας.

1. Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η συνάρτηση $-f$ είναι περιττή (μονάδες 1+4)

2. Αν και g γνησίως φθίνουσες στο διάστημα Δ τότε η $g + f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ

(μονάδες 1+4)

ΘΕΜΑ Β

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια.

B1. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $2x \leq f(x) \leq x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$ τότε να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (μονάδες 5)

B2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2+x-3|-|x-2|}{x-1} =$ (μονάδες 5)

B3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x+|x+1|}{x-1} =$ (μονάδες 5)

B4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{1+x}-1} =$ (μονάδες 5)

B5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\eta\mu^2 x + \eta\mu x - 1}{2\eta\mu x - 1} =$ (μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $4x - 2 \leq f(x) + 1 \leq x^2 + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $M(2, 5)$ (μονάδες 6)

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και να το υπολογίσετε (μονάδες 9)

Γ3. Αν επιπλέον $f(x) = ax^2 + 3x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $a = \frac{1}{4}$ (μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} (ax+1)^2 + 1 & , x \leq -1 \\ \beta x + \beta + 1 & , -1 < x \leq 0 \\ -\beta x + \gamma & , 0 < x \leq 1 \\ (x-1)^2 + \beta - 1 & , x > 1 \end{cases}$

Δ1. Αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ να αποδείξετε ότι $\alpha=1$, $\beta=2$ και $\gamma=3$

(μονάδες 6)

Αν $\alpha=1$, $\beta=2$ και $\gamma=3$

Δ2. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(μονάδες 10)

Δ2. Με την βοήθεια της C_f να βρείτε:

1. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης

(μονάδες 2)

2. Τα ακρότατα της (αν έχει)

(μονάδες 2)

3. Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 2$ (δικαιολώνοντας την απάντηση σας)

(μονάδες 1+4)