

ΘΕΜΑ Α

A1. Χαρακτηρίστε κάθε μιας από τις ακόλουθες προτάσεις, σαν σωστή (Σ) ή λάθος(Λ) (μονάδες 5)

1. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 , τότε είναι γνησίως φθίνουσα και στο $\Delta_1 \cup \Delta_2$.
2. Αν η συνάρτηση f είναι $1-1$, τότε $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in D_f$.
3. Αν $f(x) > g(x)$ για κάθε $x > 0$ τότε η C_f είναι κάτω από την η C_g στο $(0, +\infty)$.
4. Αν ορίζεται η f^{-1} μιας συνάρτησης f και το σημείο $M(\alpha, \beta) \in C_{f^{-1}}$, τότε $f(\beta) = \alpha$ και $f^{-1}(\alpha) = \beta$
5. Αν η συνάρτηση f είναι $1-1$, τότε οι εξισώσεις $f^{-1}(x) = x$ και $f(x) = x$ είναι ισοδύναμες.

A2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση για κάθε ένα από τα παρακάτω: (μονάδες 4)

1. Το συμμετρικό του σημείου $M(\alpha, \beta)$ ως προς την ευθεία $y = x$ είναι το σημείο:

A. $N(-\alpha, \beta)$ B. $N(\alpha, -\beta)$ Γ. $N(-\alpha, -\beta)$ Δ. $N(\beta, \alpha)$

2. Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς:

A. τον άξονα $x'x$ B. τον άξονα $y'y$ Γ. την ευθεία $y = x$
Δ. την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ E. τίποτε από τα προηγούμενα

3. Αν η f είναι γνησίως μονότονη και $\alpha \in f(A)$ τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$:

A. έχει μία τουλάχιστον ρίζα B. έχει μία το πολύ ρίζα.
Γ. έχει μία ρίζα ακριβώς Δ. δεν έχει καμία ρίζα (αδύνατη)

4. Η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\xi \in A$ όταν:

A. ισχύει $\xi \leq x$ για κάθε $x \in A$ B. ισχύει $f(\xi) \leq f(x)$ για κάθε $x \in A$
Γ. ισχύει $f(\xi) \geq f(x)$ για κάθε $x \in A$ Δ. υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε $f(\xi) \geq f(x_0)$

A3. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

1. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες; (μονάδες 3)
2. Πότε η συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ ; (μονάδες 3)

A4. Να χαρακτηρίσετε σαν σωστή ή λάθος καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις δικαιολογώντας την απάντησή σας.

1. Αν μια συνάρτηση είναι άρτια, τότε δεν μπορεί να είναι $1-1$. (μονάδες 1+4)
2. Αν f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ και g γνησίως αύξουσα στο διάστημα $f(\Delta)$ τότε η $g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ (μονάδες 1+4)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται μια γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το \mathbb{R} και τη οπίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(3, 2)$.

B1. Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f . (μονάδες 4)

B2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} . (μονάδες 3)

B3. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα. (μονάδες 3)

B4. Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(x^2) + 2) = 2$ (μονάδες 7)

B5. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(3 + f(x^2 + x - 3)) < 1$. (μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x - 1) - \ln(3 - x) + x$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f (μονάδες 5)

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία (μονάδες 10)

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $\ln(x - 1) - \ln(3 - x) > 2 - x$ (μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Δ και το σύνολο τιμών $f(\Delta)$ της f . (μονάδες 2+2)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1. (μονάδες 4)

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο Δ . (μονάδες 4)

Δ4. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} (μονάδες 7)

Δ5. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων:
(α) $f^{-1}(x) = 3$ $f^{-1}(x) = 0$ $f^{-1}(x) = -3$ (μονάδες 6)

