ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ

1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, τότε ισχύει $f\,'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

2. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και $x_0 \in R$, τότε για κάθε $x \in R$ υπάρχει $\xi \in R$ ώστε $f(x) - f(x_0) = f\,'(\xi)(x - x_0)$.

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β), τότε υπάρχει ένα μόνο $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\alpha) - f(\beta) = f\,'(\xi)(\alpha - \beta)$.

4. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x_0 εσωτερικό του διαστήματος [α, β], στο οποίο η εφαπτομένη του διαγράμματος της f είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

5. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β), τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (α, f (α)), (β, f (β)).

6. Αν f είναι πολυωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δύο ριζών της f, υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της f΄.

7. Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f ΄, υπάρχει το πολύ μια ρίζα της f.

8. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β], τότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$, με $x_0 \in (\alpha, \beta)$, με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

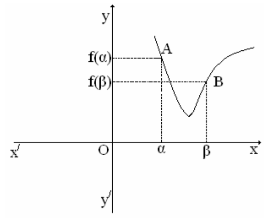
9. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β], τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f.

10. Υπάρχουν συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle, χωρίς να ισχύουν (όλες) οι υποθέσεις του θεωρήματος.

11. Αν για μια συνάρτηση ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Fermat, τότε υπάρχει x_0 ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη με τον άξονα x΄x.

12. Αν για μια συνάρτηση f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο [α, β], τότε εφαρμόζεται και το θεώρημα της μέσης τιμής, στο ίδιο διάστημα.

13. Για τη συνάρτηση του σχήματος, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f με $\xi \in (\alpha, \beta)$, όπου η εφαπτομένη της f, να είναι παράλληλη με την AB.



14. Αν $f΄(x) = (x + 3)\,x^2$, τότε το $x_0 = -3$ είναι θέση τοπικού ελάχιστου.

15. Για τη συνάρτηση $f(x) = 3x^2$, $x \in [-3, 2]$, υπάρχει μόνο ένα τοπικό ακρότατο.

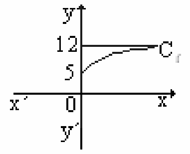
16. Για τη συνάρτηση $f(x) = ημx$, $x \in R$, υπάρχει τουλάχιστον ένα τοπικό ελάχιστο μεγαλύτερο από κάποιο τοπικό μέγιστο.

17. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση f, με $f΄(x)>0$ για $2<x<7$. Αν $f(3)=5$, τότε μπορεί να ισχύει $f(5)=4$.

18. Η συνάρτηση $f(x) = ημx + 2ex$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

19. Αν $f\,'(x) = e^{-x^2+16}$, τότε η f δεν μπορεί να έχει τοπικά ακρότατα.

20. Η συνάρτηση του σχήματος έχει θετική παράγωγο για κάθε $x \in (0, +\infty)$.



21. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g που είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους. Αν σ' ένα σημείο x_0 παρουσιάζουν και οι δυο τοπικό μέγιστο, τότε και η συνάρτηση f + g, εφόσον ορίζεται, θα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0.

22. Αν μια άρτια συνάρτηση έχει στο x_0 τοπικό ελάχιστο, τότε στο $-x_0$ θα έχει τοπικό μέγιστο.

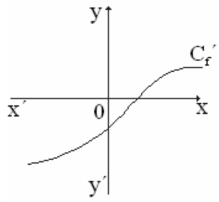
23. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f\,'(x) < 0$, $x \in R$, τότε $f(x) < 0$, $x \in R$.

24. Αν για τη συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο R, ισχύει $f\,'(5) = 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 5$.

25. Μια περιοδική συνάρτηση f μπορεί να έχει ένα μόνο τοπικό ακρότατο.

26. Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ για κάθε $x \neq 0$.
Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R^*.

27. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, και η γραφική παράσταση της f ΄ είναι αυτή του σχήματος, τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη.



28. Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, τότε θα ισχύει $f'(x) \leq 0$.

29. Για μια παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, ισχύει $f'(x)= e^x ημ4$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

30. Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f, μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f.

31. Μια συνάρτηση f μπορεί να έχει τοπικό ακρότατο και σε σημείο στο οποίο δεν είναι συνεχής.

32. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0, τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$.

33. Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης f είναι μηδέν στο διάστημα Δ, τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

34. Αν στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της f ισχύει ότι $f'(x_0)=0$, τότε το x_0 είναι τοπικό ακρότατο της f.

35. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε πιθανά ακρότατα της f είναι

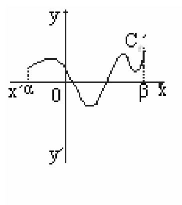
i. τα σημεία του διαστήματος (α, β) στα οποία η f ΄ μηδενίζεται

ii. τα σημεία του διαστήματος (α, β) στα οποία η f δεν παραγωγίζεται

iii. τα άκρα του [α, β].

36. Αν $f'(x) = |x - 1|$, τότε το σημείο $x_0 = 1$ είναι τοπικό ακρότατο της f.

37. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f ΄ μιας συνάρτησης f. Τότε η f έχει δύο τουλάχιστον θέσεις τοπικών ακροτάτων.

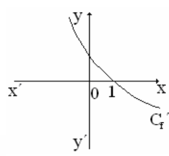


38. Αν $f'(x) = (x - 1)^2$, τότε το σημείο $x_0 = 1$ είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f.

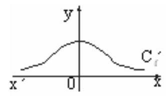
39. Αν $f'(x) = x^2 + 1$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα.

40. Αν $f'(x) = x^2 - 5x + 6$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [2, 3].

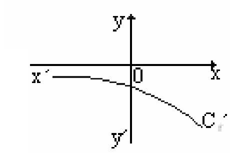
41. Αν το διάγραμμα $C_{f'}$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η f έχει ακρότατο στο $x_0 = 1$.



42. Αν το διάγραμμα $C_{f'}$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.



43. Αν το διάγραμμα $C_{f'}$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.



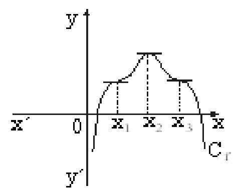
44. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(α) = f(β)$ και $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in [α, β]$, τότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια μόνο ρίζα στο (α, β).

45. Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε:

i. το x_1 είναι σημείο καμπής

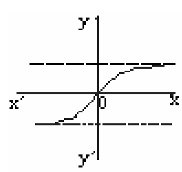
ii. το x_2 είναι σημείο καμπής

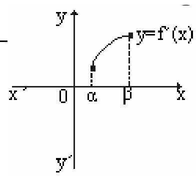
iii. το x_3 είναι σημείο καμπής



46. Αν $f''(x) = (x - 2)^2$, τότε η f έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 2$.

47. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε ισχύει $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.



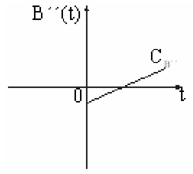


48. Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, και η γραφική παράσταση της f ΄ φαίνεται στο σχήμα, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.

49. Μια πολυωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμού έχει οπωσδήποτε σημείο καμπής.

50. Μια πολυωνυμική συνάρτηση 4ου βαθμού έχει τουλάχιστον ένα σημείο καμπής.

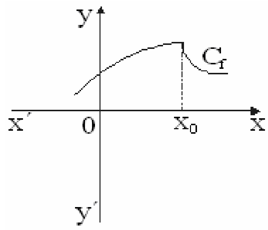
51. Η συνάρτηση f (x) = e^{-x} είναι κυρτή στο R.



52. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της B ΄΄ (t), όπου B (t) είναι η συνάρτηση του βάρους κάποιου ανθρώπου που βρίσκεται σε δίαιτα, μετά από χρόνο t. Τότε ο ρυθμός μείωσης του βάρους, στην αρχή μειώνεται και μετά αυξάνει.

53. Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και η f είναι κυρτή στο Δ, τότε f ΄΄(x) ≥ 0 για κάθε x ∈ Δ.

54. Η f παρουσιάζει στο x_0 σημείο καμπής.



55. Το σημείο Α (x_0, f (x_0)) είναι σημείο καμπής μιας συνάρτησης f, όταν η f ΄΄ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0.

56. Η ευθεία x = 2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, με f (x) = $\dfrac{x^2-4}{(x-2)^2}$.

57. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^5+x^3-2}{x^2+x+2004}$ έχει μια πλάγια ασύμπτωτη.

58. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f (x) = $\dfrac{x}{x^2-1}$ έχει δύο κατακόρυφες ασύμπτωτες.

59. Ισχύει $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x-\frac{\pi}{2}}=-1$.

60. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f (x) = e^{-x} έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο - ∞.

61. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, τότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

62. Η συνάρτηση f (x) = lnx έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία x = 0.

63. Η συνάρτηση f (x) = e^x έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία y = 0.

64. Αν για την συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα Δ ισχύει ότι η $f'(x)=0$ για κάποια $x\in\Delta$ τότε συμπεραίνουμε ότι $f(x)=c\in R$ για κάθε $x\in\Delta$.

65. Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν λέγονται **κρίσιμα σημεία** για την f στο Δ.

66. Αν μια συνάρτηση είναι **κυρτή** τότε η εφαπτόμενη της C_f σε κάθε σημείο του διαστήματος Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

67. Αν η f είναι κοίλη στο Δ τότε ισχύει ότι $f''(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

68. Αν $f'(x_0)=0$ τότε το σημείο $A(x_0,\, f(x_0))$ είναι σημείο τοπικού ακρότατου.

69. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

70. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$ τότε η ευθεία y= λx + β είναι ασύμπτωτη της C_f.

71. Με τους κανόνες του de L' hospital μπορούμε να αντιμετωπίσουμε απροσδιόριστες μορφές όπως $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα [α, β]. Τότε θα υπάρχει ξ ∈ (α, β), ώστε η εφαπτομένη της C_f στο (ξ, f (ξ))

Α. να είναι παράλληλη με τον άξονα y΄y **Β.** να έχει συντελεστή διεύθυνσης μηδέν
Γ. να έχει συντελεστή διεύθυνσης ένα **Δ.** να είναι παράλληλη με την ευθεία y = x
Ε. να μην ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης

2. Η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα [α, β]. Το θεώρημα μέσης τιμής ισχύει για την f, όταν

Α. η f είναι συνεχής στο [α, β] **Β.** η f έχει ίσες τιμές στα σημεία α και β
Γ. η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) **Δ.** η f είναι συνεχής στο (α, β)
Ε. η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και συνεχής στα α και β

3. Δίνεται η συνάρτηση f (x) = c, με πεδίο ορισμού το [α, β]. Το πλήθος των σημείων ξ ∈ (α, β) που προκύπτουν από το θεώρημα του Rolle είναι

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** το πολύ 2 **Δ.** κανένα **Ε.** άπειρα

4. Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x$, x ∈ [- 1, 2], το πλήθος των αριθμών ξ ∈ (- 1, 2) που προκύπτουν από το θεώρημα της μέσης τιμής είναι

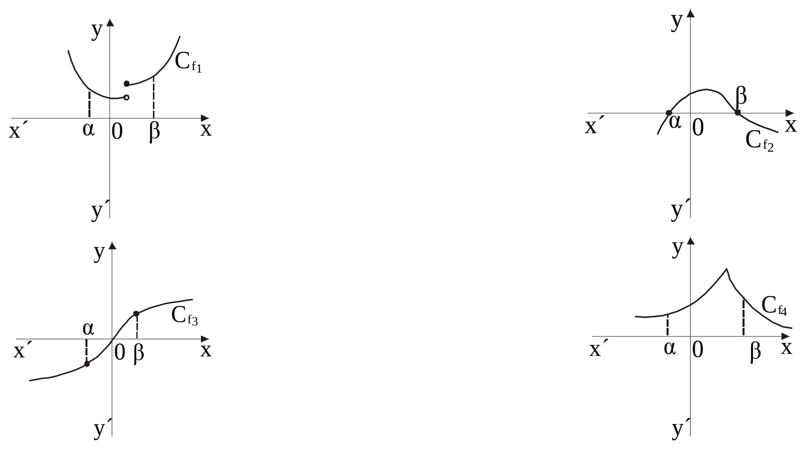
Α. τουλάχιστον τρεις **Β.** ακριβώς ένας
Γ. τουλάχιστον δύο **Δ.** ακριβώς δύο **Ε.** κανένας

5. Το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού για τη συνάρτηση f (x) = lnx, για κάθε $x_1, x_2 > 0$, εξασφαλίζει ένα ξ μεταξύ των x_1, x_2 ώστε να ισχύει

Α. $\ln\frac{x_1}{x_2} = \frac{\xi}{x_1 - x_2}$ **Β.** $\ln\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1 - x_2}{\xi}$

Γ. $\ln(x_1 - x_2) = \frac{1}{\xi}(x_1 - x_2)$ **Δ.** $\ln\frac{x_1}{x_2} = \xi(x_1 - x_2)$ **Ε.** $\ln(x_1 - x_2) = \xi(x_1 - x_2)$

6. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f_1, f_2, f_3, f_4.



Αυτές που ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [α, β] είναι οι

Α. f_2 και f_4 **Β.** μόνο η f_4 **Γ.** μόνο η f_2 **Δ.** f_2 και f_3 **Ε.** f_1 και f_4

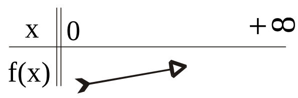
7. Οι συναρτήσεις f, g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο R. Αν f΄(x) = g΄(x) για όλα τα x ∈ R, ποια από τις παρακάτω συνθήκες πρέπει να ισχύει επιπλέον, ώστε f(x) = g(x), για όλα τα x ∈ R;

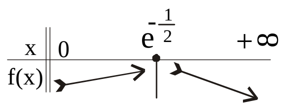
Α. f και g συνεχείς στο R **Β.** f (0) = g (0) **Γ.** f ΄΄ (x) = g ΄΄ (x) + c
Δ. f ΄΄ (0) = g ΄΄ (0) **Ε.** δεν χρειάζεται να προστεθεί άλλη συνθήκη

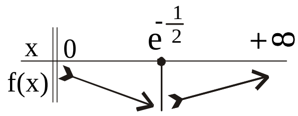
8. Αν για τις παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις f, g ισχύει f ΄ (x) = g ΄ (x), x ∈ R, τότε

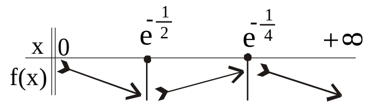
Α. f (x) = g (- x) + c **Β.** f (x) = - g (x) + c **Γ.** f (x) = g (x) – c
Δ. f (x) + g (- x) = c **Ε.** f (- x) = g (x) + c

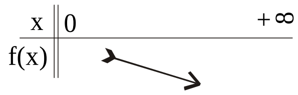
9. Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το (0, + ∞) έχει παράγωγο την f ΄ (x) = 2lnx + 1, τότε για τη μονοτονία της f ισχύει

Α. 

Β. 

Γ. 

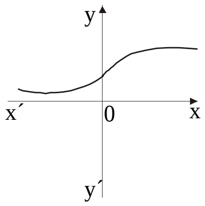
Δ. 

Ε. 

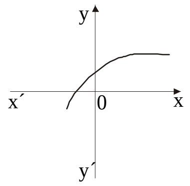
10. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και γνησίως φθίνουσα, τότε
Α. $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in R$ **Β.** $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in R$
Γ. $f'(x) \leq 0$, για κάθε $x \in R$ **Δ.** $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in R$
Ε. η $f'(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R

11. Η παράγωγος f ΄ της συνάρτησης f είναι ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Η f έχει
Α. τρία ακριβώς τοπικά ακρότατα **Β.** ένα ολικό μέγιστο και ένα ολικό ελάχιστο
Γ. τουλάχιστον τρία τοπικά ακρότατα **Δ.** τρία το πολύ τοπικά ακρότατα
Ε. ένα μόνο τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο

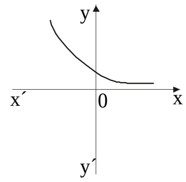
12. Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο R. Η γραφική παράσταση της f θα μπορούσε να έχει τη μορφή



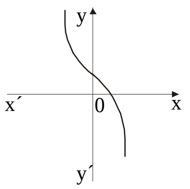
Α.



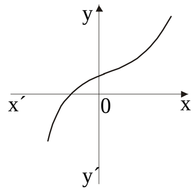
Β.



Γ.

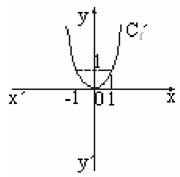


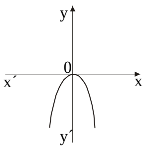
Δ.



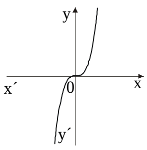
Ε.

13. Η γραφική παράσταση C_{f}΄ της παραγώγου μιας συνάρτησης φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η γραφική παράσταση της f μπορεί να είναι

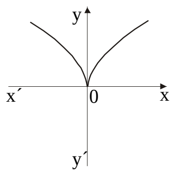




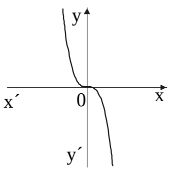
Α.



Β.



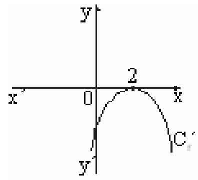
Γ.



Δ.

Ε. καμία από τις προηγούμενες

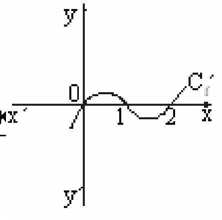
14. Η γραφική παράσταση C_{f}΄ της παραγώγου μιας συνάρτησης φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε ισχύει ότι



Α. η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$
Β. η f είναι γνησίως φθίνουσα μόνο στο $[2, +\infty)$
Γ. η f έχει τοπικό μέγιστο το σημείο $x_0 = 2$
Δ. η f έχει τοπικό ελάχιστο το σημείο $x_0 = 2$
Ε. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R

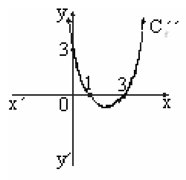
15. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f, η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα άνω σ' ένα διάστημα Δ. Τότε καθώς το x αυξάνει, η κλίση της C_f
Α. αυξάνει **Β.** ελαττώνεται **Γ.** μένει σταθερή
Δ. είναι μηδέν **Ε.** δεν μπορούμε να απαντήσουμε

16. Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω σ' ένα διάστημα Δ, τότε



Α. f ΄΄ (x) > 0, για κάθε x ∈ Δ **Β.** f ΄΄ (x) < 0, για κάθε x ∈ Δ
Γ. f ΄΄ (x) ≤ 0, για κάθε x ∈ Δ **Δ.** f ΄΄ (x) ≥ 0, για κάθε x ∈ Δ
Ε. δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το πρόσημο της f ΄΄ (x) στο Δ

17. Το διάγραμμα C_f΄της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε **δεν** ισχύει ότι



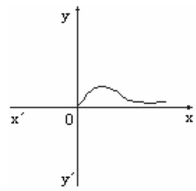
Α. η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0, 1]
Β. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [1, 2]
Γ. η f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο με x = 0
Δ. η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο με x = 1
Ε. η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο με x = 2

18. Το διάγραμμα C_f΄΄ της δεύτερης παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η f ΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο
Α. (- ∞, 1] **Β.** [1, 3] **Γ.** [3, + ∞)
Δ. R **Ε.** (- ∞, - 3]

19. Η συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα Δ και x_0 ∈ Δ. Θεωρούμε τις προτάσεις:
Ι. Η C_f δέχεται εφαπτομένη στο Α (x_0, f (x_0))
ΙΙ. Η f ΄ αλλάζει πρόσημο στο x_0
ΙΙΙ. Η f ΄΄ αλλάζει πρόσημο στο x_0
Τότε το Α (x_0, f (x_0)) είναι σημείο καμπής της C_f αν ισχύουν οι προτάσεις
Α. Ι και ΙΙ **Β.** Ι και ΙΙΙ **Γ.** ΙΙ και ΙΙΙ
Δ. μόνο η ΙΙΙ **Ε.** μόνο η Ι

20. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R, μπορεί να έχει πλήθος πλάγιων ασυμπτώτων
Α. το πολύ τρεις **Β.** το πολύ δύο **Γ.** το πολύ μία
Δ. εξαρτάται από το πλήθος των οριζοντίων ασυμπτώτων
Ε. δεν υπάρχει περιορισμός για το πλήθος

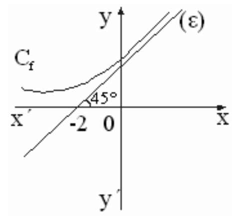
21. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = xe^{-\alpha x}$ με α > 0 και x ∈ [0, + ∞). Για όλες τις συναρτήσεις f ισχύει ότι



Α. έχουν μόνο 1 τοπικό ακρότατο
Β. το 0 είναι σημείο καμπής
Γ. η ευθεία x = 0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη
Δ. η ευθεία y = 0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη
Ε. όλα τα παραπάνω

22. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το R έχει πλήθος κατακόρυφων ασυμπτώτων
Α. το πολύ τρεις **Β.** το πολύ δύο **Γ.** το πολύ μία
Δ. καμμία **Ε.** δεν υπάρχει περιορισμός για το πλήθος

23. Η ευθεία (ε) είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f. Τότε ισχύει ότι

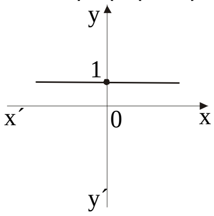


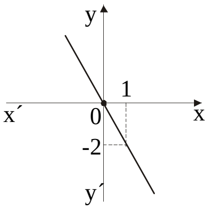
Α. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ **Β.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$
Γ. $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ **Δ.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 1$
Ε. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

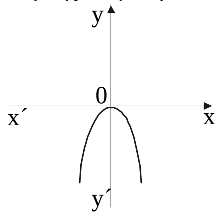
24. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, τότε η γραφική της παράσταση μπορεί να έχει
Α. δύο πλάγιες ασύμπτωτες στο + ∞ **Β.** οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη στο + ∞
Γ. κατακόρυφες ασύμπτωτες
Δ. πλάγια ασύμπτωτη στο + ∞ και οριζόντια ασύμπτωτη στο - ∞
Ε. οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη στο - ∞

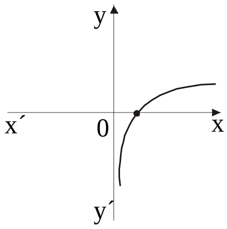
25. Η ευθεία y = x + 1 είναι πλάγια ασύμπτωτη της
Α. $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 5}{2x^2 + 3}$ **Β.** $g(x) = x^4 + 5x$ **Γ.** $h(x) = \dfrac{1 + x^2 + x}{x}$
Δ. $\varphi(x) = e^x - 1$ **Ε.** κ (x) = x + ημx

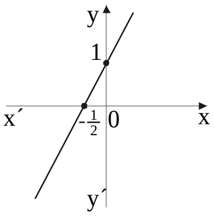
26. Αν μια συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, τότε η γραφική παράσταση της f ΄ μπορεί να είναι η

Α. 

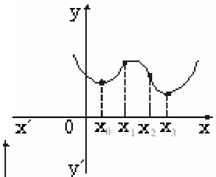
Β. 

Γ. 

Δ. 

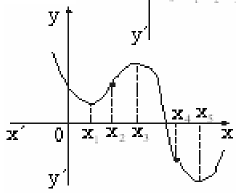
Ε. 

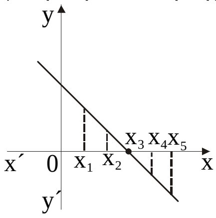
27. Αν η γραφική παράσταση της παραγωγίσιμης συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε

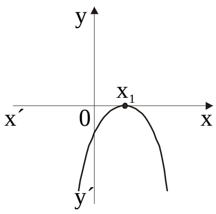


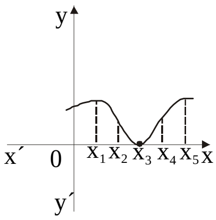
Α. η f έχει μόνο δύο τοπικά ακρότατα
Β. η f δεν παραγωγίζεται σε όλα τα σημεία του διαστήματος $[x_0, x_3]$
Γ. $f''(x) > 0$ για όλα τα $x \in (x_2, x_3)$
Δ. $f''(x) < 0$ για όλα τα $x \in (x_0, x_1)$
Ε. η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, x_3]$

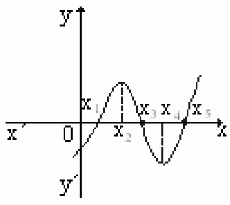
28. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f.
Η γραφική παράσταση της f ΄ μπορεί να είναι



Α. 

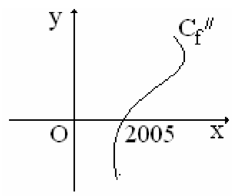
Β. 

Γ. 

Δ. 

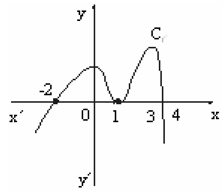
Ε. καμία από αυτές

29. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μια συνάρτησης f.
Τότε από τα παρακάτω ισχύει



Α. η f είναι γνησίως αύξουσα στο R
Β. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R
Γ. η f έχει ακρότατο στο 2005
Δ. Η εφαπτόμενη στο Α(2005, f(2005)) είναι οριζόντια

30. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f ΄ μιας συνάρτησης f στο R.
Τότε για τη συνάρτηση f ισχύει



Α. στο διάστημα [- 2, 0] η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω
Β. στο διάστημα [1, 3] ισχύει $f''(x) = 0$
Γ. στο διάστημα [0, 1] η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω
Δ. στο διάστημα [- 2, 1] η f είναι γνησίως φθίνουσα
Ε. όλα τα παραπάνω

31. Αν η f στρέφει τα κοίλα άνω στο R τότε τι από τα παρακάτω ισχύει

Α. $f'(0) = f'(1) = f'(2)$ **Β.** $f'(0) < f'(1) < f'(2)$
Γ. $f'(0) > f'(1) > f'(2)$ **Δ.** $f'(0) \le f'(1) \le f'(2)$ **Ε.** $f'(0) \ge f'(1) \ge f'(2)$

32. Το $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$ ισούται με

Α. δεν υπάρχει **Β.** $f'(1)$ **Γ.** 0 **Δ.** $+\infty$

33. Αν $f(x)=x^2$ και $g(x)=\eta\mu x$ τότε

Α. $\left(fg\right)'(1)=\eta\mu 1+\sigma\upsilon\nu 1$ **Β.** $\left(fg\right)'(1)=\eta\mu 1$

Γ. $\left(fg\right)'(1)=2\eta\mu 1+\sigma\upsilon\nu 1$ **Δ.** $\left(fg\right)'(1)=-\sigma\upsilon\nu 1$

34. Αν $f(x)=x^2$ και $g(x)=\eta\mu x$ τότε

Α. $\left(fog\right)'(1)=2\eta\mu 1+\sigma\upsilon\nu 1$ **Β.** $\left(fog\right)'(1)=2\eta\mu 1$

Γ. $\left(fog\right)'(1)=2\eta\mu 2$ **Δ.** $\left(fog\right)'(1)=2\sigma\upsilon\nu 2$

35. Αν η f είναι σταθερή στο R τότε η κλίση της f

Α. αυξάνεται **Β.** είναι σταθερή **Γ.** μειώνεται

36. Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$ τότε

Α. $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$ **Β.** $f(x)<0$ για κάθε $x\in R$

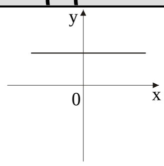
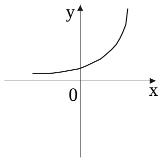
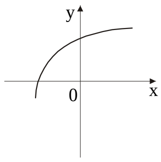
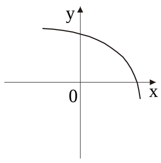
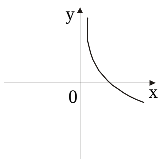
Γ. Δεν γνωρίζω το πρόσημο της $f(x)$ **Δ.** Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει 2 ακριβώς λύσεις.

37. Αν $f(x)=e^x$ και $g(x)=\ln x$ τότε η $(fog)'(x)$ ισούται

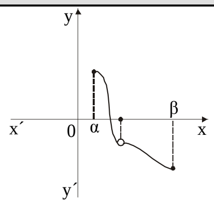
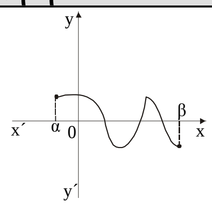
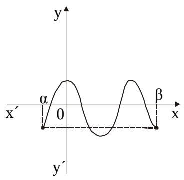
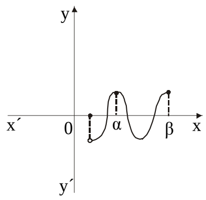
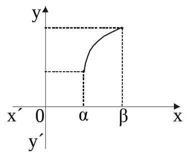
Α. με x **Β.** με $e^x\frac{1}{x}$ **Γ.** με 0 **Δ.** με $e^x(\ln x+\frac{1}{x})$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ

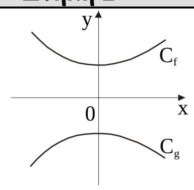
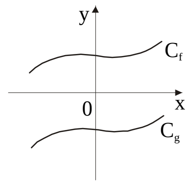
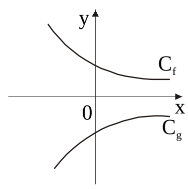
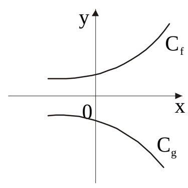
1. Κάθε συνάρτηση τη στήλης Α να την αντιστοιχίσετε στις σχέσεις που ισχύουν γι' αυτήν από τη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. 	**α.** f ΄ (x) > 0 και f ΄΄ (x) > 0
2. 	**β.** f ΄ (x) < 0 και f ΄΄ (x) < 0
3. 	**γ.** f ΄ (x) > 0 και f ΄΄ (x) < 0
4. 	**δ.** f ΄ (x) < 0 και f ΄΄ (x) > 0
5. 	**ε.** f ΄ (x) = 0
	ζ. f ΄ (x) = 0 και f ΄΄ (x) > 0

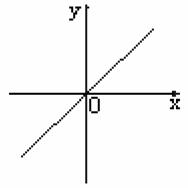
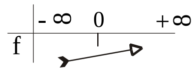
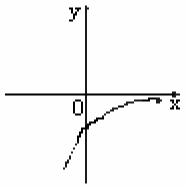
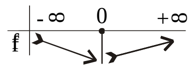
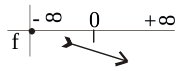
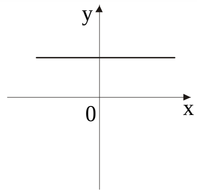
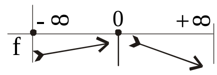
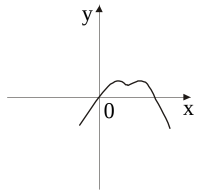
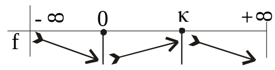
2. Να αντιστοιχίσετε κάθε θεώρημα της στήλης Α σε όσες συναρτήσεις της στήλης Β μπορεί να εφαρμοστεί στο [α, β].

Στήλη Α	Στήλη Β	
1. Θεώρημα Bolzano	 **α.**	 **β.**
2. Θεώρημα Rolle	 **γ.**	 **δ.**
3. Θεώρημα μέσης τιμής	 **ε.**	

3. Σε κάθε σχέση της στήλης Α αντιστοιχεί ένα γράφημα από τη στήλη Β. Να κάνετε την αντιστοίχιση (οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο R).

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $(f(x) - g(x))' > 0$	**α.** 
2. $(f(x) - g(x))' = 0$	**β.** 
3. $(f(x) - g(x))' < 0$	**γ.** 
4. $(f(x) - g(x))' > 0$, για $x > 0$ και $(f(x) - g(x))' < 0$, για $x < 0$	**δ.** 

4. Κάθε γρ. C_f' της στήλης Α να την αντιστοιχίσετε στη μονοτονία από τη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
C_f'	***μονοτονία της f***
1. 	**α.** σταθερή συνάρτηση **β.** 
2. 	**γ.**  **δ.** 
3. 	**ε.** 
4. 	**στ.** 

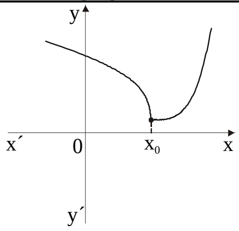
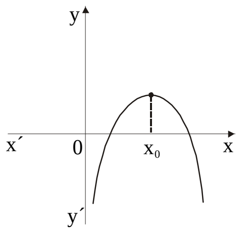
5. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε συνάρτηση της στήλης Α, το πλήθος των σημείων καμπής που αναφέρεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. f (x) = lnx, x > 0	**α.** 2
	β. 0
2. g (x) = ημx, $x \in R$	**γ.** 4
3. h (x) = $5x^3 + x + 1$, $x \in R$	**δ.** άπειρα
	ε. 1
4. t (x) = $x^4 - 2x^3$, $x \in R$	**στ.** 3

6. Στη στήλη Α γράφονται συναρτήσεις. Στη στήλη Β γράφονται τα σημεία ξ που προκύπτουν από την εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής για κάθε συνάρτηση. Να κάνετε την αντιστοίχιση.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
συνάρτηση και διάστημα	**σημείο που προκύπτει**
1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1,\ x \in [0, 1]$	**α.** $\frac{1}{2}$ e - 1
2. $f(x) = \frac{1}{x},\ x \in [-2, -1]$	**β.** $-\frac{1}{2}$ **γ.** e - 1
3. $f(x) = \ln x,\ x \in [1, e]$	**δ.** $-\sqrt{2}$ **ε.** $\frac{1}{2}$
4. $f(x) = \frac{x+1}{x-1},\ x \in [-1, 0]$	**ζ.** e - 2 **η.** $\frac{1}{4}$ **θ.** $1 - \sqrt{2}$

7. Να κάνετε την αντιστοίχιση, έτσι ώστε σε κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης της στήλης Α και η οποία δεν παρουσιάζει καμπή στο σημείο x_0, να αντιστοιχεί η σχέση που ισχύει από τη στήλη Β.

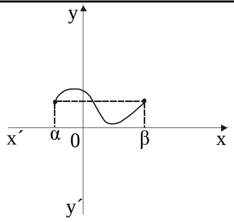
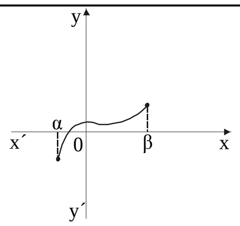
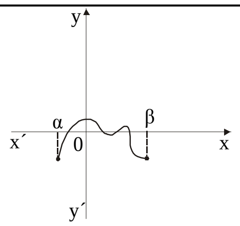
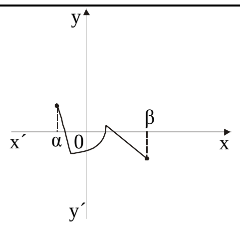
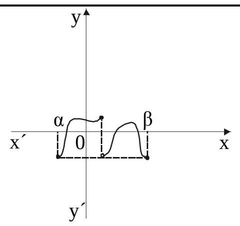
Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. 	**α.** η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 **β.** η f δεν αλλάζει είδος κυρτότητας στο x_0
2. 	**γ.** η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο R

8. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α στις ασύμπτωτές της (αν υπάρχουν), της στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $f(x) = \frac{2x+1}{2x-4}$	**α.** κατακόρυφη x = 1 οριζόντια y = - 2
2. $f(x) = \frac{3x^3 + 5x^2 + 7}{x^2 + 1}$	**β.** δεν υπάρχουν **γ.** κατακόρυφη x = 2 οριζόντια y = 1
3. $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 6$	**δ.** πλάγια y = 5x + 3
4. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$	**ε.** πλάγια y = 3x + 5 **στ.** κατακόρυφη x = 0 οριζόντια y = 0

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ

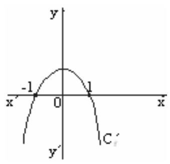
1. Να συμπληρώσετε κάθε στήλη του παρακάτω πίνακα με ΝΑΙ αν ισχύει το αντίστοιχο θεώρημα ή με ΟΧΙ αν δεν ισχύει:

Γραφική παράσταση	*Θ.Bolzano*	*Θ.Rolle*	*Θ.Μ.Τ.*
			
			
			
			
			

2. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f ΄ μιας συνάρτησης f.

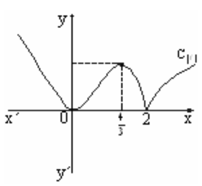
i. Να συμπληρώσετε τον πίνακα για τη μονοτονία της f:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
f΄(x)	
f(x)	

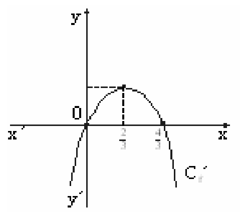


ii. Να σχεδιάσετε μια πιθανή γραφική παράσταση της f.

3. Στα σχήματα Ι και ΙΙ έχουμε τις γραφικές παραστάσεις των |f | και f ΄ αντίστοιχα. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

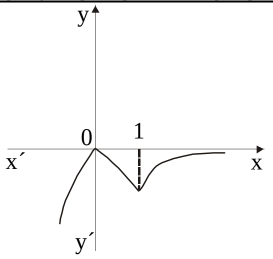
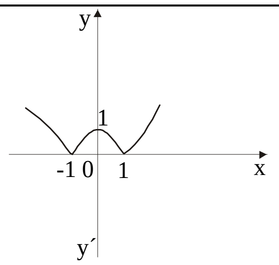
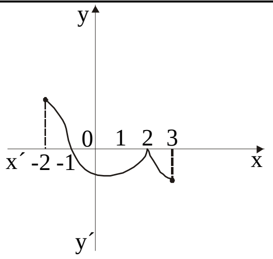
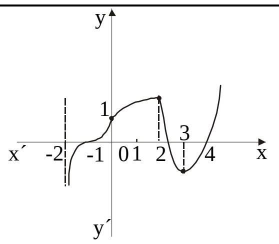


Ι.

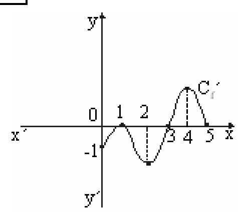


ΙΙ.

4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Γραφική παράσταση της f	***Πίνακας Μεταβολών συνάρτησης f***
	
	
	
	

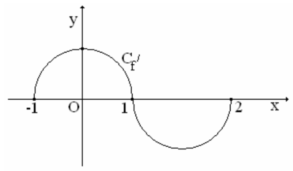
5. Η γραφική παράσταση C_{f}' της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο σχήμα. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.



	Διάστημα [0, 1]	Διάστημα [1, 2]	Διάστημα [2, 3]	Διάστημα [3, 4]	Διάστημα [4, 5]
Πρόσημο της f ΄					
Μονοτονία της f					
Μονοτονία της f ΄					
Είδος κυρτότητας της f					
	$x_0 = 1$	$x_0 = 2$	$x_0 = 3$	$x_0 = 4$	$x_0 = 5$
Ακρότατα της f					
Σημεία καμπής της f					

6. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε …………… διάστημα [α,β], παραγωγίσιμη στο ………... διάστημα (α,β) και f(α) = ……. τότε υπάρχει ………………………… ένα ξ ∈ (α,β) τέτοιο ώστε ……………….. Η παραπάνω πρόταση αποτελεί το θεώρημα του ………………….

7. Με βάση το διπλανό σχήμα να συμπληρώσετε τον πίνακα μεταβολών



x	**-1** **2**
Πρόσημο της f ΄	
Μονοτονία της f	
Μονοτονία της f ΄	
Κυρτότητας της f	
Ακρότατα της f	
Σημεία καμπής της f	

8. Να συμληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τα πεδία τιμών των συναρτήσεων

Συνάρτηση f(x)	**Πεδίο ορισμού Α**	**Σύνολο τιμών f(A)**
$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-e^{-x}}$	A = (0 , 1]	
$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$		
$f(x)=-x^3-3x+75$	A = [3 , 5]	

9. Έστω f συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και $f'(x)>0$ για κάθε ……………… σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως …………………… στο …………

10. Έστω f συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει ……………… …………….. στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε:……….. Η παραπάνω πρόταση αποτελεί το θεώρημα του …………………………..

11. Αν η f είναι ασυνεχής στο x_0 τότε η f δεν είναι …………………………………….. στο x_0.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

1. Να διατάξετε με αύξουσα σειρά τις τετμημένες των ακροτάτων και των σημείων καμπής της συνάρτησης $f(x) = (x-1)^3 (x+1)^3$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 1$ και τα διαστήματα [-2, -1], [- 1, 0], [0, 1], [1, 2]. Να βρείτε τους αριθμούς ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 που προκύπτουν από την εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στα παραπάνω διαστήματα. Να διατάξετε τους παραπάνω αριθμούς με φθίνουσα σειρά.

3. Αν μια συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα κάτω στο R και $x_1 < x_2$, να διατάξετε τους αριθμούς $f'(x_1)$, $f'(x_2)$, $f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R, η οποία έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

i. Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της f περιέχεται τουλάχιστον μια ρίζα της f ΄.

ii. Αν η f ΄ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες, να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f ΄ περιέχεται το πολύ μια ρίζα της f.

2. Δίνεται η συνάρτηση f (x) = logx.

i. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο [1, 20] για τη συνάρτηση f.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 20)$ τέτοιο ώστε $\xi = \dfrac{19 \cdot \log e}{1 + \log 2}$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 3x^2 + x + 1$, $x \in R$.

i. Να βρείτε μία τουλάχιστον συνάρτηση f για την οποία να ισχύει $f'(x) = g(x)$ (1).

ii. Από όλες τις συναρτήσεις f οι οποίες έχουν την ιδιότητα (1) να βρείτε εκείνη της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο (- 2, - 2).

iii. Να εξετάσετε αν υπάρχει συνάρτηση f με την ιδιότητα (1) της οποίας η C_f να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - \alpha)^{\mu} (x - \beta)^{\nu}$, μ, ν θετικοί ακέραιοι.

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\xi = \dfrac{\nu\alpha + \mu\beta}{\mu + \nu}$.

ii. Να αποδείξετε ότι το παραπάνω ξ χωρίζει το διάστημα [α, β] σε λόγο $\dfrac{\mu}{\nu}$, δηλαδή ισχύει

$\dfrac{\xi - \alpha}{\beta - \xi} = \dfrac{\mu}{\nu}$.

iii. Ένα πολυώνυμο P (x) είναι άρτιου βαθμού και έχει μοναδικές ρίζες τους αριθμούς 4 και 5 ενώ κάθε ρίζα έχει τον ίδιο βαθμό πολλαπλότητας. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη στην C_p στο σημείο με τετμημένη 5 είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

Σημείωση: *Αν ένα πολυώνυμο P (x) έχει ρίζα ρ με βαθμό πολλαπλότητας κ, τότε γράφεται* $P(x) = (x - \rho)^{\kappa} \cdot Q(x)$, *με* $Q(\rho) \neq 0$.

5. Να αποδειχθεί ότι ημ (α + h) < ημα + hσυνα, όπου $0 < \alpha < \alpha + h < \dfrac{\pi}{2}$.

6. Έστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και μια ευθεία (ε) με εξίσωση y = αx + β, η οποία τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε τρία διαφορετικά σημεία. Αν x_1, x_2, x_3 οι τετμημένες των σημείων αυτών (με $x_1 < x_2 < x_3$): \

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_3)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$, εφαρμόζοντας το θεώρημα της μέσης τιμής στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ $[x_2, x_3]$.

ii. Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση: Αν μια συνάρτηση είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και δέχεται σε δυο σημεία της γραφικής της παράστασης παράλληλες εφαπτομένες, τότε η f έχει τουλάχιστον ένα πιθανό σημείο καμπής.

7. Με τη βοήθεια των παραγώγων να δείξετε ότι: $ημ^6x + συν^6x + 3ημ^2xσυν^2x = 1$, για κάθε $x \in R$.

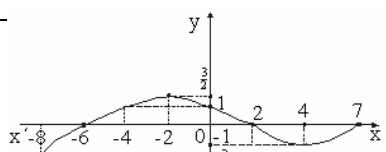
8. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $(x - 2000)^{2000} = x^{2000} + 2000^{2000}$, $x \in R$, έχει μία μόνο λύση.

9. Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] και οι αριθμοί $f(\alpha)$, $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $f(\beta)$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

i. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha}$ και $\dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\beta)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta}$ είναι ίσοι.

ii. Να αποδείξετε ότι η δεύτερη παράγωγος της f μηδενίζεται σ’ ένα τουλάχιστον σημείο.

10. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και η f ΄ μηδενίζεται σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, x_0)$, $(x_0, +\infty)$. Μπορούμε να αποφανθούμε ότι η f είναι σταθερή στο R; Αν τα σημεία, για τα οποία δεν γνωρίζουμε ότι έχουν παράγωγο μηδέν, είναι $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$, μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα;



11. Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το [- 8, 7], της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα.

i. Να μελετήσετε το πρόσημο της f (x).

ii. Να λύσετε την ανίσωση f (x) > 1.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της f ΄ (x) και να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολής της f (x).

iv. Αν $g(x) = e^{f(x)}$ και $h(x) = \ln[f(x)]$, $x \in (-6, 2)$, να εξετάσετε τις g, h ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο.

12. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f(0) = 0$.

i. Να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

ii. Να αποδείξετε ότι ισχύει $g'(x) = \dfrac{1}{x}\left(f'(x) - \dfrac{f(x)}{x}\right)$.

iii. Αν η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

13. Ένα πολυώνυμο P (x) ικανοποιεί τη σχέση $P(x) = P'(x) + x^3$.

i. Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου.

ii. Να βρείτε το πολυώνυμο P (x).

iii. Να υπολογίσετε το πλήθος των πραγματικών ριζών του.

iv. Να βρείτε το πρόσημο των ριζών του.

14. Δίνονται τα πολυώνυμα P (x) και Q (x), ώστε $P(x) \neq Q(x)$ και $P''(x) \neq Q''(x)$ για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P'(x) = Q'(x)$ έχει ακριβώς μια λύση, εξετάζοντας το βαθμό του $S(x) = P(x) - Q(x)$.

15. Έστω ότι $x^{\alpha} \geq \alpha^{x}$ $(\alpha>0)$ για κάθε $x > 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Fermat να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

16. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το [0, 6]. Αν η C_f περνά από το σημείο Α (0, 1) και ισχύει: $f'(x) > x$ για κάθε $x \in [0, 6]$, να αποδείξετε ότι:

i. η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \dfrac{x^2}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο [0, 6].

ii. $g(x) > 0$, $x \in [0, 6]$.

iii. το σημείο Β (6, 18) δεν ανήκει στη C_f.

17. Να γίνει η γραφική παράσταση της y = f (x) κοντά στο σημείο x = - 1 αν ισχύουν συγχρόνως:
$f(-1) = 2$, $f'(-1) = -1$, $f''(-1) = 0$, $f'''(x) > 0$.

18. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$, $x \in R$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

i. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους δεν τέμνονται.

ii. Να βρείτε τη μικρότερη απόσταση την οποία μπορεί να έχει ένα σημείο της C_f από την ευθεία y = x.

iii. Να βρείτε το σημείο της $y = e^x$, το οποίο απέχει τη μικρότερη απόσταση από την y = x.

iv. Ποια νομίζετε ότι είναι τα σημεία των C_f και C_g που να απέχουν την ελάχιστη απόσταση;

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$.

i. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.

ii. Να δείξετε ότι τα σημεία που αντιστοιχούν στα τοπικά ακρότατα της f ανήκουν στην καμπύλη με εξίσωση $y = -\dfrac{1}{2}x^3$.

20. Σε έναν υποτασικό ασθενή με αρχική πίεση Π_0 χορηγούνται δύο διαφορετικά φάρμακα για την υπόταση σε διαφορετικές ημερομηνίες, των οποίων οι δράσεις καθορίζονται από τις συναρτήσεις:
$\Pi_1(t) = \Pi_0 + t\,e^{-t}$ όπου t ο χρόνος δράσης και Π_1 η πίεση
$\Pi_2(t) = \Pi_0 + t^2 e^{-t}$ όπου t ο χρόνος δράσης και Π_2 η πίεση
Να βρείτε:

i. Σε πόση ώρα το κάθε φάρμακο φτάνει στη μέγιστη απόδοσή του.

ii. Ποιο είναι το πιο αποτελεσματικό όσον αφορά στην άνοδο της πίεσης.

21. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη δυο φορές στο R, για την οποία ισχύει:
$xe^x f''(x) + xe^x (f'(x))^2 = e^x - 1$, για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι αν:

i. η f έχει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \neq 0$, τότε αυτό θα είναι τοπικό ελάχιστο.

ii. η f έχει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 0$, τότε αυτό θα είναι τοπικό ελάχιστο.

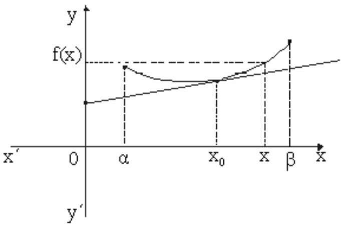
22. Έστω ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού $P(x) = αx^3 + βx^2 + γx + δ$.

i. Να αποδείξετε ότι έχει πάντοτε ένα σημείο καμπής.

ii. Να βρείτε τη συνθήκη μεταξύ των συντελεστών του, ώστε στο σημείο καμπής να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

iii. Αν έχει δύο θέσεις τοπικών ακροτάτων στα x_1, x_2, να αποδείξετε ότι $P''(x_1) + P''(x_2) = 0$.

23. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο διάστημα [α, β]. Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται στο [α, β], πάνω από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in [α, β]$ με εξαίρεση το σημείο επαφής.



24. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ και $g(x) = 2x + f(x)$.

i. Να αποδείξετε ότι $\ln x < x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

iii. Να μελετήσετε τη g ως προς τα κοίλα - κυρτά και τα σημεία καμπής.

iv. Να εξετάσετε τη θέση της g ως προς την ευθεία $y = 2x$.

v. Να βρείτε ένα σημείο x_0, στο οποίο η εφαπτομένη της g είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x$.

25. Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ, παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, +\infty)$ και ισχύει $f(x)\cdot f''(x) > (f'(x))^2$, να δείξετε ότι η $g(x) = \ln f(x)$ στρέφει τα κοίλα άνω.
Εφαρμογή: Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x) = \ln(x^2 + 2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

26. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 5x + 1$, να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \cdot f(x) - 3x^2 + x \cdot ημx}{x^2 \cdot f(x) - 5x^3}$.

27. Για ποιες τιμές του κ η συνάρτηση $f(x) = x^3 + κx^2 + 1$ έχει σημείο καμπής για $x = 1$;

28. Για ποια χορδή ΒΓ παράλληλη προς την εφαπτομένη ενός κύκλου σ' ένα σημείο του Α, το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι μέγιστο;

29. Δίνεται μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(α) = f(β) = 0$ και $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (α, β)$.

30. Ένα δοχείο γεμίζει με νερό. Ο όγκος V (t) του νερού στο δοχείο μετά t sec δίνεται από τον τύπο:
$V(t) = \dfrac{2}{3}\left(20t^2 - \dfrac{t^3}{6}\right)$, $0 \leq t \leq 120$

i. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου, όταν t = 20 sec.

ii. Πότε ο ρυθμός αυτός γίνεται μέγιστος;

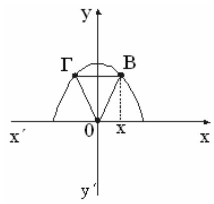
31. Εξηγήστε γιατί η χρήση του κανόνα του L' Hospital δεν δίνει την πραγματική τιμή του ορίου:
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 2x - 3}{x^2 - 5x + 4} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 + 2}{2x - 5} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{6x}{2} = 3$ (η πραγματική τιμή είναι $-\dfrac{5}{3}$).

32. Η ενέργεια, που καταναλώνεται κατά την κίνηση σωματιδίου, δίνεται από τον τύπο
$E(υ) = \dfrac{1}{υ}[2(υ - 35)^2 + 750]$, $υ > 0$, όπου υ είναι η ταχύτητα του σωματιδίου.

i. Να βρείτε την ταχύτητα που πρέπει να έχει το σωματίδιο ώστε να καταναλώνει την ελάχιστη ενέργεια.

ii. Πόση είναι η ελάχιστη αυτή ενέργεια;

33. Στο σχήμα φαίνεται τμήμα παραβολής με εξίσωση $y = \frac{1}{14}(48 - x^2)$, και το ισοσκελές τρίγωνο ΟΒΓ με ΟΒ = ΟΓ.



i. Να βρείτε τα σημεία Β, Γ για τα οποία το εμβαδόν του τριγώνου ΟΒΓ γίνεται μέγιστο.

ii. Ποιο είναι αυτό το μέγιστο εμβαδόν;

34. Έστω f η συνάρτηση της ποσότητας κάποιας ουσίας στο αίμα, σε σχέση με το χρόνο t. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f είναι ίσος με $\frac{1}{t-2}$, $t > 2$:

i. Να βρείτε τον τύπο της f, αν ισχύει f (3) = 4.

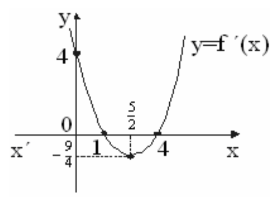
ii. Μέχρι ποια χρονική στιγμή θα ισχύει f (t) > 1;

35. Έστω $f(x) = x^2(3 - x)$, όπου η f μετρά την αντίδραση του οργανισμού σε ποσότητα x μιας ουσίας (αύξηση πίεσης, πτώση θερμοκρασίας σώματος κ.λπ.). Να βρείτε την τιμή του x για την οποία η αντίδραση έχει τη μέγιστη τιμή. Ποια είναι η μέγιστη τιμή;

36. Για την f ισχύει f(0)=1 και f΄(0)=2. Να βρείτε προσεγγιστικές τιμές για τα f(0,1) και f(-0,05).

37. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού το ανοικτό διάστημα Δ. Να δείξετε ότι αν η $h(x) = f(x) - g(x)$ έχει στο $x_0 \in \Delta$ μέγιστο, τότε η f και η g έχουν παράλληλες εφαπτομένες στο $x_0 \in \Delta$.

38. Η γραφική παράσταση $C_{f΄}$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f είναι η παραβολή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

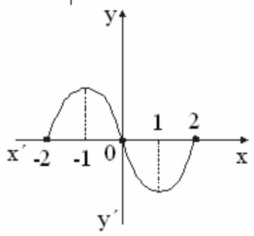


i. Να κατασκευάσετε πίνακα μονοτονίας της f.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f, αν f (0) = 1.

iii. Να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

39. Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να λυθούν:



i. $f΄(x) = 0$

ii. $f΄(x) < 0$

iii. $f΄(x) > 0$

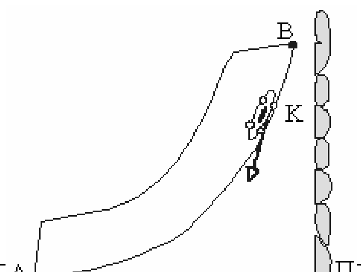
40. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha > 0$. Στο σημείο Μ της C_f με τετμημένη $x_1 > 0$ φέρνουμε εφαπτομένη (ε) που τέμνει τον x΄x στο Τ. Θεωρούμε τα σημεία Ρ, Ν πάνω στον x΄x ώστε ΜΡ ⊥ x΄x και ΜΝ ⊥ (ε).

i. Να δείξετε ότι: (α) ΟΡ = 2ΤΡ (β) $TP = \frac{f(x_1)}{f΄(x_1)}$

(γ) $PN = f(x_1) \cdot f΄(x_1)$ (δ) $TM = \frac{f(x_1)}{f΄(x_1)} \cdot \sqrt{1 + (f΄(x_1))^2}$

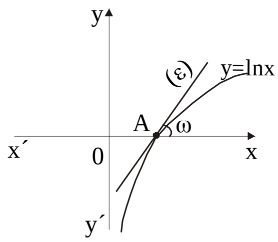
ii. Να δείξετε ότι για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$ το ΤΡ είναι σταθερό. Για ποια εκθετική συνάρτηση ισχύει $TP = \frac{1}{2}$.

iii. Το κομμάτι ΑΒ της πίστας δοκιμών αυτοκινήτων που αναπτύσσουν μεγάλες ταχύτητες είναι τμήμα παραβολής με κορυφή στο Α. Στο σημείο Κ, που απέχει 40 μέτρα από το προστατευτικό διάζωμα ΑΠ, το αυτοκίνητο Κ εκτρέπεται λόγω της πολύ μεγάλης ολισθηρότητας, κινείται σχεδόν ευθύγραμμα κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης. και προσκρούει στο διάζωμα ΑΠ σε απόσταση 8

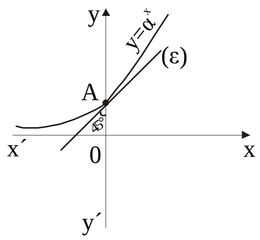


μέτρα από το Α. Ποια θα μπορούσε να είναι η εξίσωση του τμήματος Α;

41. Στο σχήμα (α) να υπολογίσετε τη γωνία ω και στο σχήμα (β) να υπολογίσετε τον αριθμό α. (Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα η (ε) είναι εφαπτομένη της C_f).



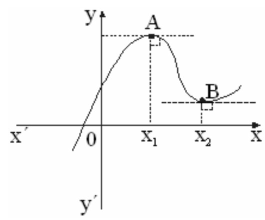
(α)



(β)

42. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = x^3 + \kappa x^2 + x + \lambda$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}$.



43. Ένα κέντρο έρευνας για την ασφάλεια των αυτοκινήτων εξετάζει το διάστημα s που διανύει ένα αυτοκίνητο από τη στιγμή που ο οδηγός θα διακρίνει ένα εμπόδιο μέχρι την ακινητοποίησή του. Οι ερευνητές κατέληξαν σε μια σχέση της μορφής $3K\frac{ds}{dt} - e^t s^2 = 0$ όπου t ο χρόνος που μεσολαβεί από τη στιγμή που ο οδηγός αντιλαμβάνεται το εμπόδιο μέχρι να πατήσει το φρένο, Κ μια σταθερά που εξαρτάται από το μοντέλο και παριστάνει το διάστημα που θα διανύσει το αυτοκίνητο από τη στιγμή που ο οδηγός θα πατήσει φρένο μέχρι την ακινητοποίησή του (υποτίθεται ότι στην έρευνα χρησιμοποιήθηκε για όλα τα αυτοκίνητα ταχύτητα 80 km/h).

i. Να βρείτε τη συνάρτηση s (t) χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη αρχική συνθήκη.
ii. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης και να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα.
iii. Κάποιος γνωρίζει ότι ο χρόνος αντίδρασής του είναι 0,8 sec. Πόση απόσταση πρέπει να κρατά από ένα προπορευόμενο αμάξι όταν τρέχει με υ = 80 km/h;

44. Ο W. Estes έχει ασχοληθεί με την καμπύλη εκμάθησης ενός πειραματόζωου. Το πειραματόζωο μέσα σε έναν ελεγχόμενο χώρο έπρεπε να επιλέξει τον κατάλληλο μοχλό ώστε να πάρει το φαγητό του. Με την πάροδο του χρόνου ο αριθμός των σωστών επιλογών r (σε μια εβδομάδα) βρέθηκε ότι δίνεται από τον τύπο $r(t) = \frac{13}{1+25e^{-0,24t}}$ (t εβδομάδες εκπαίδευσης).

i. Να εξετάσετε αν το πειραματόζωο θα βελτιώνει συνεχώς τις επιδόσεις του.
ii. Τι θα συμβεί αν το πείραμα συνεχιστεί για μεγάλο χρονικό διάστημα;

45. Ο υπολογιστής τσέπης για να υπολογίσει τις δυνάμεις του αριθμού e, δηλαδή τις τιμές του e^x, χρησιμοποιεί το άθροισμα $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$ (στην ουσία χρησιμοποιεί πολύ περισσότερους προσθετέους).

i. Να δείξετε ότι για κάθε x > 0 η προσέγγιση του υπολογιστή είναι μικρότερη από την πραγματική τιμή του e^x.
ii. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $24e^x = 12x^2 + 4x^3 + x^4$, $x \geq 0$ έχει λύση.
iii. Να δείξετε ότι για ολοένα μεγαλύτερες τιμές του e^x, x > 0, έχουμε ολοένα μεγαλύτερο σφάλμα.

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (x - 1000)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.
ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς 1000^2 και $998^2 + 2^2$.
iii. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της $f(x) = (x - \alpha)^\nu + x^\nu$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, $\nu = 2\rho$.
iv. Να συγκρίνετε τους αριθμούς 10000^{100} και $9000^{100} + 1000^{100}$.

47. Να αποδείξετε με τη βοήθεια των παραγώγων ότι οι συναρτήσεις
$f(x) = (e^x + e^{-x})^2$ και $g(x) = (e^x - e^{-x})^2$, $x \in R$, διαφέρουν κατά μία σταθερά. Να βρεθεί αυτή η σταθερά.

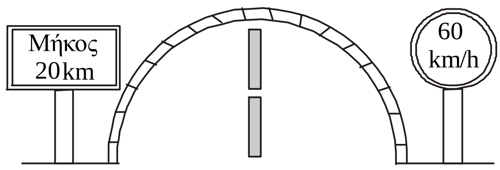
48. Η κατανάλωση ενός φορτηγού που τρέχει με σταθερή ταχύτητα υ είναι $1 + \frac{\upsilon^2}{300}$ lt πετρέλαιο την ώρα, το πετρέλαιο κοστίζει 0,50€. το lt και η αμοιβή του οδηγού είναι 12 € την ώρα. Να βρείτε την ταχύτητα του φορτηγού για να έχουμε το ελάχιστο δυνατό κόστος μεταφοράς, καθώς και τα έξοδα της μεταφοράς για μια απόσταση 500 km.

49. Έστω η συνάρτηση $f:[a,\beta] \to R$, η οποία είναι συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(a) = 2\beta,\ f(\beta) = 2a$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2) = 4$

50. Το παρακάτω σχήμα παριστάνει την είσοδο μιας σήραγγας του εθνικού οδικού δικτύου. Όταν η κίνηση είναι αυξημένη παρατηρείται «μποτιλιάρισμα» των αυτοκινήτων στη σήραγγα αυτή. Μια ομάδα συγκοινωνιολόγων μελέτησε τη ροή f των αυτοκινήτων για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα και κατέληξε σε έναν τύπο ο οποίος εκφράζει τη ροή (πλήθος αυτοκινήτων / sec) σαν συνάρτηση της ταχύτητας υ των αυτοκινήτων μέσα στη σήραγγα. Ο τύπος είναι $f(\upsilon) = \dfrac{22\upsilon}{\upsilon + \dfrac{\upsilon^2}{22} + 73}$.



i. Ποιες επεμβάσεις προτείνετε στη σήμανση που υπάρχει στην είσοδο της σήραγγας;
ii. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή ροή αυτοκινήτων μέσα στη σήραγγα;

51. Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 1 - \eta\mu 2x \quad x \in R$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ii. Η εξίσωση $x^3 + 2x - 1 = \eta\mu 2x$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα (0,1).

52. Έστω πολυωνυμική συνάρτηση f 3^{ου} βαθμού για την οποία ισχύουν
$f(1) = 3a,\ f(2) = 5\beta - 2 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ f(3) = 10\beta - 4 - 3a$.

i. Να εφαρμόσετε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στα διαστήματα [1,2] και [2,3].

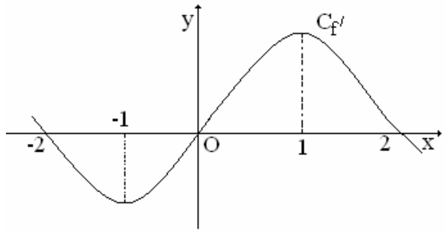
ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της C_f με τετμημένη $\xi \in (1,3)$ στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

iii. Να δείξετε ότι το σημείο του προηγούμενου ερωτήματος είναι μοναδικό.

53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$ και το σημείο Α(1,0). Να βρεθεί σημείο Μ της C_f που απέχει ελάχιστη απόσταση από το Α. Να δειχθεί ότι η ΑΜ είναι κάθετη στην εφαπτόμενη της C_f στο Μ.

54. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει:
$2e^{f(x)} + 3[f(x)]^3 - 6f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 7$ για κάθε $x \in R$. Να αποδειχθεί ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

55. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου $\left(f'\right)$ μιας συνάρτησης f Να βρεθούν τα ακρότατα, η μονοτονία, τα κοίλα και τα σημεία καμπής



56. Αν για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $f''(x) > 0$ και $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ να δειχθεί ότι $f(x) < x$ για κάθε $x \in (0,1)$.