ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ

1. Μια συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο x_0, έναν πραγματικό αριθμό ℓ. Αναγκαστικά το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της.
2. Τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης f, όταν το x παίρνει τιμές κοντά στο x_0, συμπίπτουν πάντοτε.
3. Το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 εξαρτάται από την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό.
4. Ισχύει πάντα $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ με $\alpha \epsilon D_f$
5. Αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο x_0, τότε αυτό είναι μοναδικό.
6. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, τότε υπάρχει συνάρτηση g με $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ και $f(x) = \ell + g(x)$.
7. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = l$, τότε οι συναρτήσεις f, g έχουν πάντοτε όριο στο x_0.
8. Αν για τις συναρτήσεις $f, g : A \to \mathbb{R}$ υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)]$, τότε πάντοτε $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
9. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{|x|}{x} - 1$.Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.
10. Μια συνάρτηση f έχει στο $x_0 = 2022$ όριο το -2023. Τότε η f παίρνει αρνητικές τιμές για κάποια x κοντά στο 2012.
11. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$, $\ell \neq 0$, τότε πάντοτε ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.
12. Αν το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ είναι θετικός αριθμός, τότε η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο x_0.
13. Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα που περιέχει το 0. Τότε ισχύει πάντοτε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.
14. Αν $\lim\limits_{x\to \alpha} f(x) = \beta$, $\lim\limits_{x\to \beta} g(x) = \gamma$ και $f(x) \neq \beta$ κοντά στο α, τότε $\lim\limits_{x\to \alpha} g(f(x)) = \gamma$.
15. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{x} = 1$ με $\alpha \neq 0, 1$.
16. Αν $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$, τότε $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(3x)}{x} = 3\ell$.
17. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \neq 0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$.
18. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.
19. Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$
20. Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq 0$
21. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ τότε $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0.
22. Αν $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0. τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
23. Αν $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0. τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
24. Ισχύει ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $\in \mathcal{R}$.
25. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

26. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και λ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x) - \lambda) = 0$

27. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 τότε αν $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = 0$ είναι $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

28. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}[f(x) + g(x)]$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$.

29. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

30. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

31. Αν το όριο μιας συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_0 είναι θετικός αριθμός, τότε η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές για κάθε x κοντά στο x_0.

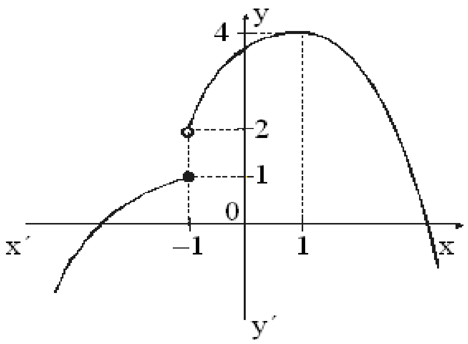
32. Ισχύει η σχέση $\lim_{x\to \alpha} f(x) = \beta \Leftrightarrow \lim_{x\to \alpha^-} f(x) = \lim_{x\to \alpha^+} f(x) = \beta$

33. Ισχύει η σχέση $\lim_{x\to \alpha} f(x) = \beta \Leftrightarrow \lim_{\gamma\to 0} f(\alpha + \gamma) = \beta$

34. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = k$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$ με $k, m \in \mathcal{R}$ και $f(x) < g(x)$ τότε $k < m$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα, τότε **λάθος** είναι

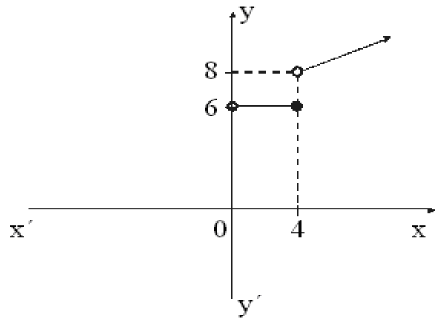


Α. $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$ Β. $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1$

Γ. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 2$ Δ. $f(-1) = 2$

Ε. $f(1) = 4$

2. Για τη συνάρτηση f του σχήματος, ισχύει



Α. $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 6$ Β. $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 8$

Γ. $\lim_{x\to 4^-} f(x) \neq \lim_{x\to 4^+} f(x)$

Δ. υπάρχει το $\lim_{x\to 4} f(x)$ Ε. $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x)$

3. Αν $f(x) \le g(x)$ με $x \in (1, 3)$ και οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο πραγματικό αριθμό στο 2, τότε ισχύει ότι

Α. $\lim_{x\to 2} f(x) > \lim_{x\to 2} g(x)$ Β. $\lim_{x\to 2} f(x) > 0$ και $\lim_{x\to 2} g(x) < 0$

Γ. $\lim_{x\to 2} f(x) \le \lim_{x\to 2} g(x)$ Δ. $\lim_{x\to 2} f(x) \ge \lim_{x\to 2} g(x)$ Ε. τίποτα από τα παραπάνω

4. Αν $h(x) \le f(x) \le g(x)$ με $x \in (0, 2)$ και $\lim_{x\to 1} h(x) = \frac{12}{2x+3}$ $g(x) = 3$, τότε ισχύει ότι

Α. $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{2}$ Β. $\lim_{x\to 1}[f(x) - g(x)] = 3$

Γ. $\lim_{x\to 1}[h(x) - f(x)] = 3$ Δ. $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ Ε. τίποτα από τα παραπάνω

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

1. Αν $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi$ είναι τα όρια στο $x_0 = 1$ των συναρτήσεων f, g, h, φ, s αντιστοίχως και ισχύει:

$h(x) \leq g(x) \leq f(x) \leq s(x) \leq \varphi(x)$ για κάθε $x \in (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \frac{3}{2})$

να διατάξετε τους αριθμούς $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi$ από το μικρότερο (ή ίσο) προς το μεγαλύτερο.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

β) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

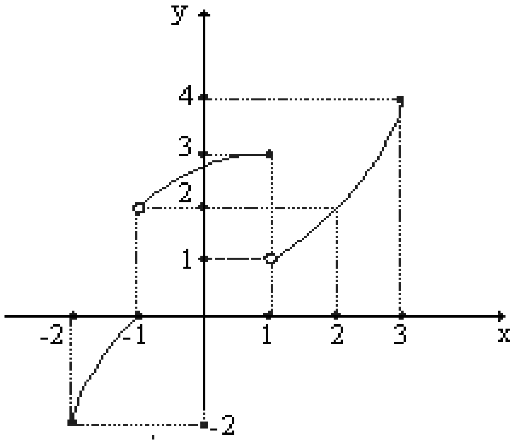
γ) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

δ) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

ε) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

στ) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

ζ) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$



2. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -6$ και $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 10$, να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - g(x)}{(h(x))^2}$ β) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{3f(x) - 4[g(x)]^2}{g(x) + 2f(x)}$

3. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x+1}{x^2-1}, & x < -1 \\ \ln(x+\beta), & x \geq -1 \end{cases}$ να έχει όριο πραγματικό αριθμό στο $x_0 = -1$.

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια.

i. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$ **ii.** $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{3}{1 - x^3}\right)$

iii. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x\sigma\upsilon\nu x}\right)$ **iv.** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{\eta\mu^2 x} - \dfrac{1}{1 - \sigma\upsilon\nu x}\right)$

5. Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν ώστε: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x + \eta\mu 2x + \ldots + \eta\mu \nu x}{x} = 28.$

6. Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν ώστε: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x \cdot \eta\mu 2x \cdot \ldots \cdot \eta\mu \nu x}{x^\nu} = 120.$

7. Δίνεται η συνάρτηση f με $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ώστε: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) + \eta\mu \frac{\pi(x - 1)}{2} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \dfrac{\pi}{2}.$

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ β) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 1}{x - 1}$