

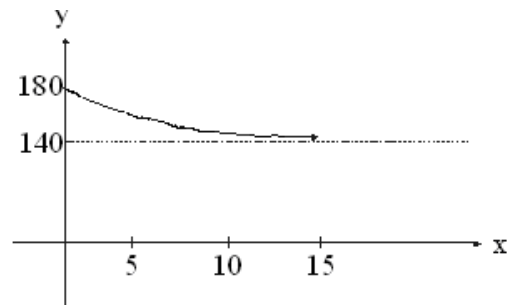
1. Αν $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x} + e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
2. Αν η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε πάντοτε ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
3. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$
4. Αν $a > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$
5. Αν $0 < a < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$
6. Αν $0 < a < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$
7. Αν $0 < a < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$
8. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
9. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μια συνάρτησης f

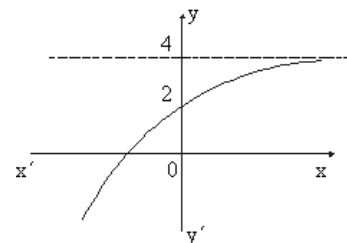
Τότε ισχύει

- A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 180$.
- B. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 140$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 140$.
- Γ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 140$.
- Δ. $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$



2. Για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 4 - 2e^{-x}$ ισχύει

- A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$
- Γ. η γραφική παράσταση της f μπορεί να είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα
- Δ. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
- Ε. τίποτα από τα παραπάνω



3. Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2+1}{(4-x)(4+x)}$ είναι ίσο με

- A. -16 B. -4 Γ. 1 Δ. +∞ Ε. -∞

4. Αν $f(x) \leq x^3 + 1$ για $x < -4$, τότε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (αν υπάρχει) είναι ίσο με

- A. +∞ B. -∞ Γ. 0 Δ. -1 Ε. -12

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+x+1}{4x^2+7}$. Η τιμή $f(10^{2023})$ προσεγγίζεται με ικανοποιητική ακρίβεια από τον αριθμό

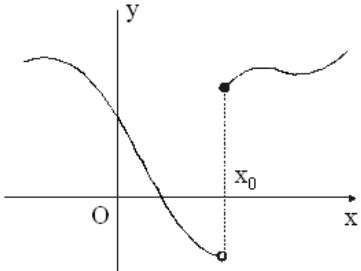
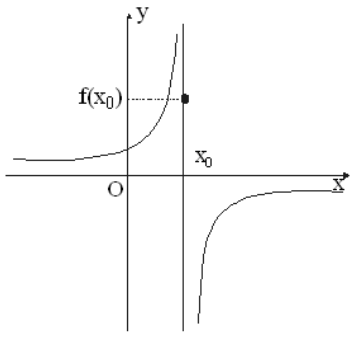
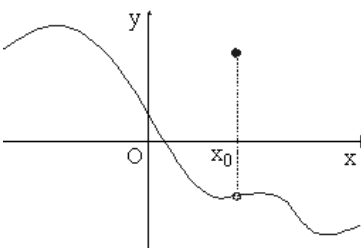
- A. 1,4 B. 10^4 Γ. 0,75 Δ. 0,25 Ε. $\frac{1}{7}$

6. Από τις παρακάτω ισότητες **λάθος** είναι η

- A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{συν} \frac{1}{x} = 1$ B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{συν} x}{x} = 0$ Γ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$
 Δ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu \frac{1}{x} = 0$ Ε. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \varepsilon\varphi \frac{1}{x} = 0$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ

1. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γρ. παράσταση από τη στήλη A τις σχέσεις που ισχύουν από τη στήλη B.

Στήλη A	Στήλη B
<p>1. </p>	<p>α. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$</p>
<p>2. </p>	<p>β. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$</p> <p>γ. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$</p>
<p>3. </p>	<p>δ. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$</p> <p>ε. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$</p>

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν):

α) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

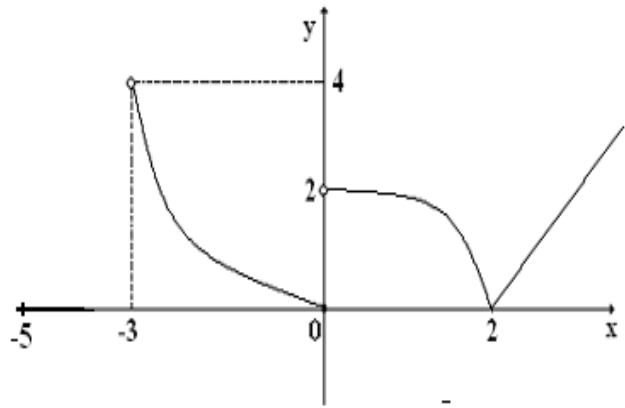
β) $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ε) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

στ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$



2. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

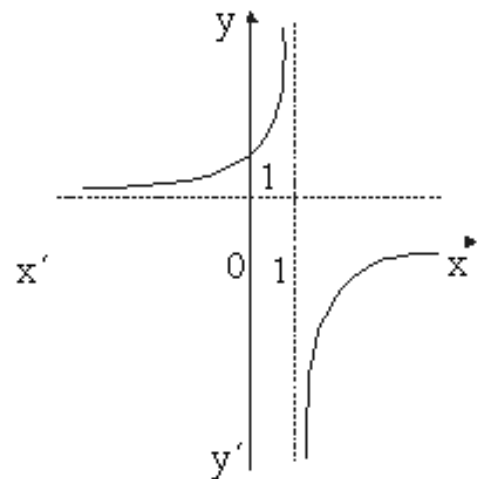
γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu^\rho \frac{1}{x} \right)$ με $\rho \in \mathbb{N}^*$ και $\rho \geq 2$

3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

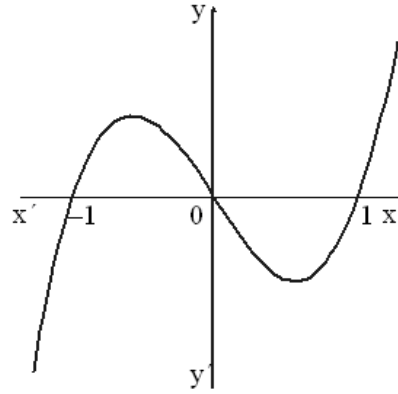
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.



4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Να βρείτε τα όρια:

- α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- β) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
- γ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- δ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



5. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

- α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu - 2)x^3 + (\mu + 1)x + 1}{\mu x^2 + 1}, \text{ αν } \mu \in \mathbb{R}$
- β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{a^x + 1}, \text{ αν } a > 0$
- γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \lambda x - \mu), \text{ αν } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x + 2^{x+1}}{a^{x+1} + 2^x}, \text{ αν } a > 0$

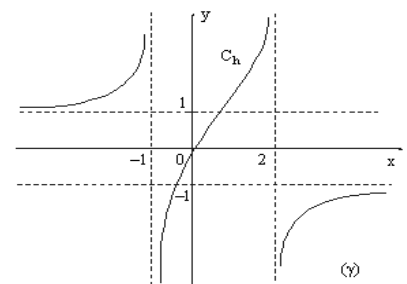
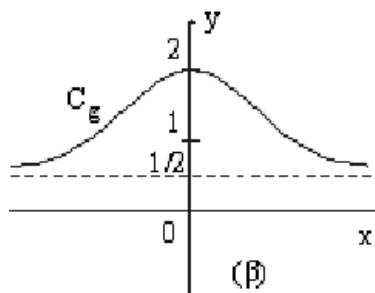
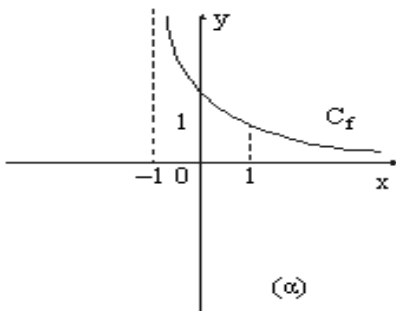
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + \kappa^2}{x}\right), \kappa > 0$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- γ) Να δείξετε ότι η $f(x) - \ln x > 0$ και να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$.

7. Αν $f(x) = \ln \frac{x-3}{2x}$, να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού της f
- β) τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 3} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

8. Οι γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων f, g και h φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



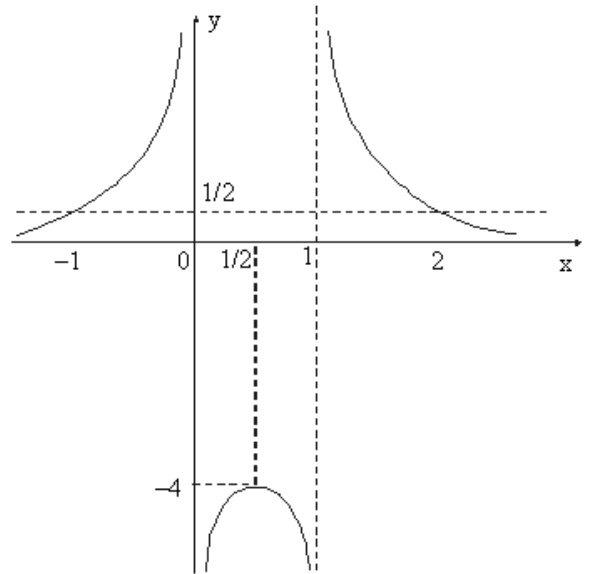
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων.
- β) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

9. Η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το πρόσημο της f .

β) Να βρεθούν τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$



γ) Να προσδιορίσετε τις οριακές τιμές της $\frac{1}{f}$ στα σημεία του ερωτήματος (β).

δ) Να βρείτε τον τύπο της f , αν ξέρετε ότι είναι ένας από τους παρακάτω:

$$f_1(x) = \frac{2x+1}{6x+5}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x^2+x}, \quad f_3(x) = \frac{1}{2|x^2-1|}, \quad f_4(x) = \frac{1}{x^2-x}$$

ε) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

10. Το ποσοστό της ανεργίας σε μια χώρα είναι 12% και εκτιμάται ότι σε x έτη από τώρα θα δίνεται από τον τύπο $f(x) = \frac{16x+36}{2x+3}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = 8 + \frac{12}{2x+3}$.

β) Να εξηγήσετε γιατί η ανεργία δεν θα πέσει ποτέ κάτω από το 8%.

γ) Μετά από αρκετά χρόνια, ποιο θα είναι περίπου το ποσοστό ανεργίας;