Θέμα 2000.

1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

i. Να αποδείξετε ότι αν f΄(x)>0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ. Μονάδες 8

ii. Αν f΄(x)<0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της συνάρτησης f ; Μονάδες 4,5

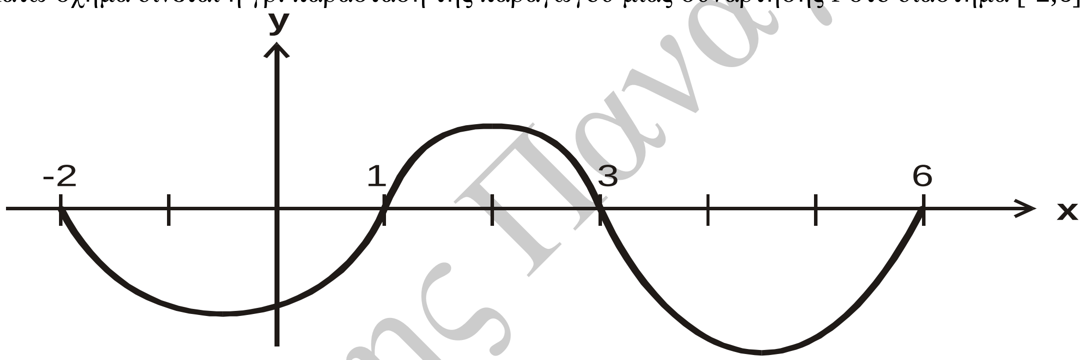
2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν σαν Σωστές ή Λάθος.

i. Η συνάρτηση $f(x)=e^{1-x}$ είναι γν.αύξουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Μονάδες 2,5

ii. Η συνάρτηση f με $f'(x)=-2\eta\mu x+\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}+3$, όπου $x\in[\dfrac{\pi}{2},\pi)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Μονάδες 2,5

iii. Αν f΄(x) = g΄(x) + 3 για κάθε x∈Δ, τότε η συνάρτηση h(x)=f(x)-g(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ. Μονάδες 2,5

3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γρ. παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f στο διάστημα [-2,6].



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

Θέμα 2001.

1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε
i. όλες οι συναρτήσεις της μορφής: G(x)=F(x)+C, C∈R είναι παράγουσες της f στο Δ και
ii. κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή: G(x)=F(x)+C, C∈R Μονάδες 6,5

2. Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

i. $\int_a^\beta \lambda f(x)dx=$ **ii.** $\int_a^\beta \left(f(x)+g(x)\right)dx=$

iii. $\int_a^\beta \left(\lambda f(x)+\mu g(x)\right)dx=$ όπου λ,μ∈R και f,g συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β] **Μονάδες 6**

3. Να βρείτε τη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει f΄΄(x)=6x+4, x∈R και η γραφική της παράσταση στο σημείο της A(0,3) έχει κλίση 2. **Μονάδες 6,5**

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

i. $\int_0^1 \left(e^x+x\right)dx$ **ii.** $\int_1^4 \dfrac{3x^2}{\sqrt{x}}dx$ **iii.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x\right)dx$ **Μονάδες 6**

Θέμα 2002. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, σαν Σωστές ή Λάθος

1. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. Μονάδες 2

2. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα. Μονάδες 2

3. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R. και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα [α, β] , στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle. Μονάδες 2

4. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] και σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0)=0$. Μονάδες 2

5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$. Μονάδες 2

Θέμα 2003.

1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

i. όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$,$c \in R$ είναι παράγουσες της f στο Δ και

ii. κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $\mathbf{G(x)}= F(x) + c$, $c \in R$. Μονάδες 10

2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, σαν Σωστές ή Λάθος.

i. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f . Μονάδες 2

ii. Μία συνάρτηση $f : A \to R$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$. Μονάδες 2

Θέμα 2004.

1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ. **Μονάδες 9**

2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, σαν Σωστές ή Λάθος.

i. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. **Μονάδες 2**

ii. Αν *f, g* είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού R και ορίζονται οι συνθέσεις *fog* και *gof*, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες. **Μονάδες 2**

iii. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄. **Μονάδες 2**

iv. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0, με $k \in N$ και $k \geq 2$. **Μονάδες 2**

3. Να ορίσετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. **Μονάδες 6**

Θέμα 2005.

1. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ **Μονάδες 9**

2. Πότε μια συνάρτηση f: $A \to R$ λέγεται "1-1"; **Μονάδες 4**

3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν σαν Σωστές ή Λάθος.*

i. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ. **Μονάδες 2**

ii. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o. Αν η f είναι κυρτή στο (α,x_o) και κοίλη στο (x_o,β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_o\ f(x_o))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f. **Μονάδες 2**

iii. Αν για δύο συναρτήσεις f,g ορίζονται οι fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά $fog \neq gof$. **Μονάδες 2**

Θέμα 2006.

1. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ; **Μονάδες 5**

2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν σαν Σωστές ή Λάθος.*

i. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o και $g(x_o)\neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o)=\frac{f(x_o)g'(x_o)-f'(x_o)g(x_o)}{[g(x_o)]^2}$. **Μονάδες 2**

ii. Για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $\left[\ln|x|\right]'=\frac{1}{x}$ **Μονάδες 2**

iii. Μια συνάρτηση $f:A \to IR$ είναι 1–1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x . **Μονάδες 2**

iv. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\alpha)-G(\beta)$ **Μονάδες 2**

Θέμα 2007.

1. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **Μονάδες 10**

2. Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού; **Μονάδες 5**

3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, σαν Σωστές ή Λάθος.*

i. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα. **Μονάδες 2**

ii. Αν f, g, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α,β], τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx \cdot \int_\alpha^\beta g'(x)dx$$

Μονάδες 2

iii. Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε

$$\left(\int_{\alpha}^{x} \mathrm{f(t)dt}\right)' = \mathrm{f(x)}$$ για κάθε x∈Δ. **Μονάδες 2**

iv. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β) όπου

Α= $\lim\limits_{x\to a^+} f\left(x\right)$ και Β= $\lim\limits_{x\to \beta^-} f\left(x\right)$ **Μονάδες 2**

v. Έστω δύο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f,g είναι συνεχείς στο Δ και f΄(x)=g΄(x) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει f(x) = g(x) για κάθε x∈Δ. **Μονάδες 2**

Θέμα 2008.

1. Έστω μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β].Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{f(t)dt} = G(\beta) - G(\alpha)$ **Μονάδες 10**

2. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού; **Μονάδες 5**

3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν σαν Σωστές ή Λάθος.*

i. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες. **Μονάδες 2**

ii. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. **Μονάδες 2**

iii. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{f(x)dx}$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x. **Μονάδες 2**

iv. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής (α, x_0) ∪ (x_0, β) και x_0 ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_0}\bigl(\mathrm{f}(x)\bigr) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x) - \ell) = 0$$ **Μονάδες 2**

Θέμα 2009.

1. Έστω η συνάρτηση f(x) = $\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (0 , +∞) και ισχύει:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$ **Μονάδες 9**

2. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ; **Μονάδες 6**

3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν σαν Σωστές ή Λάθος*

i. Η συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο. **Μονάδες 2**

ii. Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0$ και f(x) < 0 κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ **Μονάδες 2**

iii. Έστω η συνάρτηση f(x) = εφx. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο

$R_1 = R-\{x/\sigma\upsilon\nu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ **Μονάδες 2**

Θέμα 2010.

1. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 4**

2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$; **Μονάδες 3**

3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν σαν Σωστές ή Λάθος.*

i. Αν f(x) = α^x, α > 0, τότε ισχύει $(\alpha^x)' = x\alpha^{x-1}$

ii. Αν ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, τότε πάντοτε ισχύει fog = gof

iii. Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)}=0$

iv. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και ισχύει f(x) ≥ 0 για κάθε x∈ [α,β],

τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \ge 0$ **Μονάδες 10**

Θέμα 2011.

1. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης η παράγουσας της f στο Δ. Μονάδες 5

2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, σαν Σωστές ή Λάθος*

i. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$ όταν $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A$

ii. Αν η f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.

iii. Αν $\lim\limits_{x\to x_{00}} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$

iv. Κάθε συνάρτηση που είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, είναι και παραγωγίσιμη σ' αυτό. Μονάδες 10

Θέμα 2012.

1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β) τότε, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. Μονάδες 7

2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες; Μονάδες 2

3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle Μονάδες 6

4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, σαν Σωστές ή Λάθος.*

i. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης –f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f.

ii. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

iii. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β].Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{f(t)dt} = G(\beta) - G(\alpha)$

Μονάδες 10

Θέμα 2013.

1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό. *Μονάδες 7*

2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat. *Μονάδες 4*

3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f; *Μονάδες 4*

4. Σωστό-Λάθος.

i. Αν μια συνάρτηση f είναι 1–1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

ii. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}(-f(x)) = +\infty$

iii. Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f , g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

iv. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. *Μονάδες 10*

Θέμα 2014.

1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο, όμως, η f είναι συνεχής. Αν η f'(x) διατηρεί πρόσημο στο $(a, x_0)\cup(x_0, \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) *Μονάδες 7*

2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano. *Μονάδες 4*

3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ; *Μονάδες 4*

4. Σωστό-Λάθος *Μονάδες 10*

i. Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0)\cup(x_0, \beta)$. Ισχύει η ισοδυναμία $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty\right)$

ii. Αν είναι 0 < α < 1 , τότε $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$

iii. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι κυρτή στο Δ , τότε υποχρεωτικά $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

Θέμα 2015.

1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

i. όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$ είναι παράγουσες της f στο Δ, και

ii. κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$ *Μονάδες 7*

2. Πότε μια συνάρτηση $f : A \to R$ λέγεται συνάρτηση 1-1; *Μονάδες 4*

3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f; *Μονάδες 4*

4. Σωστό - Λάθος *Μονάδες 10*

i. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

ii. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

iii. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

iv. Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β] και G είναι μία παράγουσα της f στο [α,β], τότε πάντοτε ισχύει: $\int_a^\beta f(t)dt = G(a) - G(\beta)$

Θέμα 2016.

1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$. *Μονάδες 7*

2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. *Μονάδες 4*

3. Πότε λέμε ότι η ευθεία y είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$. *Μονάδες 4*

4. Σωστό – Λάθος *Μονάδες 10*

i. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

ii. Αν $f(x) = \ln|x|$ για κάθε $x \neq 0$, τότε $f'(x) = \frac{1}{|x|}$ για κάθε $x \neq 0$

iii. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

iv. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu \ge 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

v. Για κάθε συνάρτηση f , συνεχή στο [α,β] , ισχύει: αν $\int_a^\beta f(x)dx > 0$ τότε $f(x) \ge 0$, στο [α,β]

Θέμα 2017.

1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$. *Μονάδες 7*

2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, αν για κάποιο x_0 εR ισχύει $f^{//}$ (x_0) ' = 0 τότε το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή, ή ψευδή. *(μονάδα 1)*

β)Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). *(μονάδες 3)*

3. Να γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση: *Μονάδες 4*

Για κάθε συνεχή συνάρτηση f:[α, β] → R, αν ισχύει f(α) f(β) >0, τότε

α. η εξίσωση f(x)=0 δεν έχει λύση στο (α,β).

β. η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β).

γ) η εξίσωση f(x) = 0 έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α,β).

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης f(x) = 0 στο (α,β).

4. Σωστό – Λάθος *Μονάδες 10*

i. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f:[α,β] α β →R, αν *G* είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε

$$\int_a^{\alpha} f(x)dx = G(\alpha) - G(\beta)$$

ii. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν x_1, x_2 ε Δ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

iii. Αν ένα σημείο Μ(α,β) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο Μ΄(β,α) ανήκει στη γραφική παράσταση *C΄* της f^{-1}.

iv. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f:[α,β] → R, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), αν f(α) = f(β), τότε υπάρχει ακριβώς ένα ξ ∈ (α,β) τέτοιο ώστε $f^{/}(\xi) = 0$

v. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f:[α,β] → R, αν ισχύει $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = 0$ τότε f(x) = 0 για κάθε x ∈ [α,β].