Θέμα 2000. Η τιμή P (σε χιλιάδες δραχμές) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνεται από τον τύπο $P(t) = 4 + \dfrac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}}$

1. Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά. Μονάδες 2

2. Να βρείτε το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται. Μονάδες 10

3. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη. Μονάδες 8

4. Να δείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται, χωρίς όμως να μπορεί να γίνει μικρότερη από την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά. Μονάδες 5

Θέμα 2001. Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

$f(x) = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\int_1^x \dfrac{tf(t)}{x^2}dt$ με $x>0$

1. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Μονάδες 3

2. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x) = \frac{1+\ln x}{x},\ x > 0$ Μονάδες 7

3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. Μονάδες 6

4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. Μονάδες 4

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1, x=e. Μονάδες 5

Θέμα 2002. Έστω η συνάρτηση f, ορισμένη στο R. με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις: $f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x)$, $x \in R$. και $f(0) = 2f'(0) = 1$.

1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f. **Μονάδες 12**

2. **Α**ν g είναι συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα [0,1], να δείξετε ότι η εξίσωση $2x - \displaystyle\int_0^x \dfrac{g(t)}{1+f^2(t)}dt = 1$ έχει μία μοναδική λύση στο διάστημα [0,1]. **Μονάδες 13**

Θέμα 2003. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο R με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x) = ef(2-x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη. **Μονάδες 8**

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μοναδική ρίζα. **Μονάδες 8**

3. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x΄x, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^o. Μονάδες 9

Θέμα 2004. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, +\infty) \to R$ τέτοια, ώστε

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} 2xf(2xt)dt.$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. **Μονάδες 7**

2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - (x + 1)$. **Μονάδες 7**

3. Να αποδείξετε ότι η f(x) έχει μοναδική ρίζα στο $[0, +\infty)$. **Μονάδες 5**

4. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. **Μονάδες 6**

Θέμα 2005. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: R →R ,για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005.$$

1. Να δείξετε ότι:

i. $f(0)=0$ **Μονάδες 4**

ii. $f'(0)=1$. **Μονάδες 4**

2. Να βρείτε το $\lambda \in R$ έτσι, ώστε: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + \lambda (f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3$. **Μονάδες 7**

3. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο R και $f'(x)>f(x)$ για κάθε $x \in R$, να δείξετε ότι:

i. $xf(x)>0$ για κάθε $x \neq 0$. **Μονάδες 6**

ii. $\int_0^1 f(x)dx < f(1)$. **Μονάδες 4**

Θέμα 2006. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ln(x+1) - (x+1)\ln x$ με $x>0$.

1. Να αποδείξετε ότι:

i. $\ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}, \ x > 0$.

ii. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$. **Μονάδες 12**

2. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(1 + \dfrac{1}{x})$. **Μονάδες 5**

3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\alpha \in (0,+\infty)$ τέτοιος ώστε $(\alpha+1)^{\alpha} = \alpha^{\alpha+1}$. **Μονάδες 8**

Θέμα 2007.

Θέμα 2008. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$.
Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad x \in [0, +\infty), \text{ και } \quad h(x) = \frac{F(x)}{\int_0^x tf(t)dt}, \quad x \in (0, +\infty).$$

1. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{t-1}[f(t) + F(t)]dt = F(1)$ **Μονάδες 6**

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$. **Μονάδες 8**

3. Αν $h(1)=2$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(t)dt < 2\int_0^2 t\, f(t)dt$ **Μονάδες 6**

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(t)dt = \dfrac{1}{2}F(1)$ **Μονάδες 5**

Θέμα 2009. Δίνεται μια συνάρτηση $f:[0,2]\to R$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=kxe^{2x}$, $0\le x\le 2$, $f'(0)=2f(0)$, $f'(2)=2f(2)+12e^4$, $f(1)=e^2$ όπου k ένας πραγματικός αριθμός.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=3x^2-\dfrac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}$, $0\le x\le 2$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα [0,2]. **Μονάδες 4**

2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f''(\xi)+4f(\xi)=6\xi e^{2\xi}+4f'(\xi)$ **Μονάδες 6**

3. Να αποδείξετε ότι $k = 6$ και ότι ισχύει $g(x) = 0$ για κάθε $x\in[0,2]$. **Μονάδες 6**

4. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3e^{2x}$, $0\le x\le 2$ **Μονάδες 5**

5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \dfrac{f(x)}{x^2}dx$ **Μονάδες 4**

Θέμα 2010. Έστω συνάρτηση $f: R\to R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο R με $f(0)=1$ και $f'(0)=0$

1. Να αποδείξετε ότι $f(x)\ge 1$ για κάθε $x\in R$ **Μονάδες 4**

2. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\int_0^1 f(xt)dt+x^3}{ημ^3x}=+\infty$

Αν επιπλέον δίνεται ότι $f'(x)+2x=2x\cdot(f(x)+x^2)$, $x\in R$, τότε:

3. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{x^2}-x^2$, $x\in R$ **Μονάδες 8**

4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h(x)=\int_x^{x+2} f(t)dt$, $x\ge 0$ και να λύσετε στο R την ανίσωση $\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt+\int_6^4 f(t)dt<0$ **Μονάδες 7**

Θέμα 2011. Δίνεται η συνάρτηση $f: R\to R$, η οποία είναι τρις φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1+f(0)$ $\quad f'(0)<f(1)-f(0)$ και $\quad f''(x)\ne 0$ για κάθε $x\in R$

1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της γρ. παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$ Μονάδες 3

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R Μονάδες 5

Αν επιπλέον $g(x)=f(x)-x$ για κάθε $x\in R$ τότε:

3. Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx}{xg(x)}$ Μονάδες 6

4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx>2$ Μονάδες 5

5. Αν το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γρ. παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$ είναι $E(\Omega)=e-\dfrac{5}{2}$ τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε

$\int_0^{\xi} f(x)dx = 2$ Μονάδες 6

Θέμα 2012. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : A \to R$ με $A = (0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν:

$f(A) = (-\infty,0]$ $\quad$ f' συνεχής στο $A = (0,+\infty)$

$$2f(x) + \left(x + \frac{1}{x}\right)e^{f(x)} = \int_1^x e^{f(t)} f'(t)\left(t + \frac{1}{t}\right)dt + 2,\ x > 0.$$

Έστω επίσης η συνάρτηση $F(x) = \int_1^x f(t)dt,\ x > 0$.

1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right),\ x > 0$ Μονάδες 8

2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της F έχει μοναδικό σημείο καμπής $\Sigma\left(\chi_0, F(x_0)\right)$ $x_0 > 0$ το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_0, \beta)$ με $\beta > x_0$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο $M\left(\xi, F(\xi)\right)$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία $\varepsilon : F(\beta)x - (\beta - 1)y + 2012(\beta - 1) = 0$ Μονάδες 6

3. Αν β>1 να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\left[F(\beta) + (1-\beta)f(\beta)\right]x^5}{x-1} + \frac{(\beta-1)(x+1)^3}{x-3} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα ως προς x, στο διάστημα (1,3) Μονάδες 5

4. Να αποδείξετε ότι: $\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt \le \int_1^x tf(t)dt$, x>0 Μονάδες 6

Θέμα 2013. Δίνεται συνάρτηση f : [0, + ∞) → R δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο [0, + ∞) , για την οποία ισχύουν:

- $f(x) = x + \int_1^x \left(\int_1^u \frac{\left(f'(t)\right)^2 - 1}{f(t)} dt\right)du$ για κάθε x > 0
- f (x) f′ (x) ≠ 0 για κάθε x > 0 και f (0) = 0

Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις: $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ με x > 0 και $h(x) = \left(f'(x)\right)^3$ με x ≥ 0

1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) \cdot f''(x) + 1 = \left(f'(x)\right)^2$ για κάθε x > 0 *Μονάδες 4*

2. **α.** Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και f′ στο (0, + ∞) *(μονάδες 4)*

β. Να αποδείξετε ότι f′ (0) = 1 *(μονάδες 3)*

3. Δεδομένου ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο (0, + ∞) , να αποδείξετε ότι:

α. $g(x) \geq 2 - x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ *(μονάδες 2)*

β. $\int_0^1 (2-x)f(x)dx < 1$ *(μονάδες 4)*

4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 0 και x = 1 *Μονάδες 8*

Θέμα 2014. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : A \to R$, $A = (0,+\infty)$ με σύνολο τιμών $f(A) = R$, τέτοια, ώστε $e^{f(x)}\left(f^2(x) - 2f(x) + 3\right) = x$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f *Μονάδες 7*

Για τα ερωτήματα 2 και 3, δίνεται ότι $f^{-1}(x) = e^x\left(x^2 - 2x + 3\right), x \in R$

2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. (*μονάδες 3*) Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα y΄y, και την ευθεία x=1 *Μονάδες 9*

3. Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ θεωρούμε τα σημεία $A(x, f^{-1}(x))$, $B(f^{-1}(x), x)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in (0,+\infty)$, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in (0,+\infty)$ η απόσταση των σημείων A , B γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους. *Μονάδες 9*

Θέμα 2015. Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to R$ για την οποία ισχύει: $\left(x^2 - x\right)\cdot f'(x) + x \cdot f(x) = 1$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$

1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ *Μονάδες 6*

2. Να αποδείξετε ότι $\int_1^x f(t)dt = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{f(t)}{t}dt$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$ *Μονάδες 4*

3. α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = -\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{f(t)}{t}dt$, $x \in (0,+\infty)$ είναι κοίλη. (*μονάδες 5*)

β. Έστω E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο που η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 3$. Να αποδείξετε ότι $E < 2$ (*μονάδες 4*)

4. Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt \geq \frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{x} tf(t)dt$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$ *Μονάδες 6*

Θέμα 2016. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \frac{\ln x}{x}+1, & 0<x<1 \\ 1, & x=1 \\ \frac{\ln x}{x-1}, & x>1 \end{cases}$

1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο (0, +∞) (*μονάδες 3*) και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f . (*μονάδες 2*) *Μονάδες 5*

2. Να αποδείξετε ότι το $x_0=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f . *Μονάδες 8*

3. i)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)= 0 έχει μοναδική ρίζα στο (0, +∞). (*μονάδες 3*)

ii)Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες x =1 καιx= x_0, όπου x_0 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x) =0 στο (0, +∞), να αποδείξετε ότι $E=\frac{-x_0^2-2x_0+2}{2}$ (*μονάδες 4*) *Μονάδες 7*

4. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο [1, +∞) να αποδείξετε ότι (x+1)F(x) > xF(1)+ F(x^2), για κάθε x >1. *Μονάδες 5*