

2001. Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:
$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \leq 3 \\ \frac{1 - e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$$

B1. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $\alpha = -1/9$. Μονάδες 9

B2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , στο σημείο $A(4, f(4))$. Μονάδες 7

B3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$. Μονάδες 9

2004. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 \ln x$.

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα. Μονάδες 10

B2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής. Μονάδες 8

B3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . Μονάδες 7

2006. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2$ με $x \geq 2$.

B1. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1. Μονάδες 6

B2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της. Μονάδες 8

B3. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφ. παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y = x$. Μονάδες 4

B4. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} . Μονάδες 7

2016. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

B1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f . Μονάδες 6

B2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης. Μονάδες 9

B3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f . Μονάδες 7

B4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα 1, 2, 3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό) Μονάδες 3

2017. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x, x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}, x \neq 1$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ Μονάδες 5

B2. Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right), x \in (0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. Μονάδες 6

B3. Αν $\varphi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Μονάδες 7

B4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες 7

2018. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 8

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

B4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Μονάδες 7

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δε σβήνει.)

2019. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{-x} + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

Μονάδες 3

B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2, 3)$.

Μονάδες 7

B3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη της (μονάδες 4).

Μονάδες 6

B4. Έστω $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$, $x > 2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

Μονάδες 9

2020. (NEO). Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ και } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ και τύπο } g(x) = e^x$$

B1. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 5

B2. Αν $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$ με $x > 0$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι '1-1' και να βρείτε την αντίστροφη της.

Μονάδες 8

B3. Αν $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ με $x > 1$ να μελετήσετε την συνάρτηση φ ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 6

B4. Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος B3 να βρεθούν τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$$

Μονάδες 6

2020. (ΠΑΛΑΙΟ). Δίνετε η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-3} \text{ με } x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R} - \{3\}$ Μονάδες 5
- B2.** Να αποδείξετε ότι f και f^{-1} είναι ίσες. Μονάδες 8
- B3.** Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ Μονάδες 6
- B4.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \left(f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right)$ Μονάδες 6

2021. Δίνετε η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x+1) = (x+1)e^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- B1.** Να αποδείξετε ότι η $f(x) = xe^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$ Μονάδες 3
- B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.. Μονάδες 6
- B3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν. Μονάδες 9
- B4.** Να βρείτε:
- το σύνολο τιμών της συνάρτησης f Μονάδες 4
 - το πλήθος των ριζών της εξίσωσης η $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ Μονάδες 3

2022. Δίνετε η συνάρτηση $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

και η συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$

- B1.** Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $h = f \circ g$ Μονάδες 6
- B2.** Αν $h(x) = (x-1)^2$, $x \in [0,1]$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι "1 1" (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h (μονάδες 6). Μονάδες 9
- B3.** Έστω $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)}{1-x}, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$
- Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$. μονάδες 6
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$, όπου $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ μονάδες 4

2023. Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{4-e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \ln x$.

- B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = g \circ h$. μονάδες 5
- Έστω $f(x) = \frac{4-x^2}{x}$, $x > 0$
- B2.** μονάδες 8
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).
 - Να αποδείξετε ότι $\frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e}$ (μονάδες 4)
- B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f . μονάδες 6
- B4.** Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}$ μονάδες 6