2000.

Τη χρονική στιγμή t=0 χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $f(t)=\dfrac{at}{1+\left(\dfrac{t}{\beta}\right)^2}$, t≥0 όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

Δ1. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β. *Μονάδες 15*

Δ2. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά. *Μονάδες 10*

2001.

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i) f(x) $\neq$ 0, για κάθε x$\in$ R

ii) f(x) = $1-2x^2\int_0^1 t f^2(xt)\,dt$, για κάθε x$\in$ R.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}-x^2$$, για κάθε x$\in$ R.

Δ1. ~~Ν.α.ο.~~ $\cancel{f'(x)=-2xf^2(x)}$.Αν $f'(x)=-2xf^2(x)$ τότε *Μονάδες 10*

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή. *Μονάδες 4*

ii. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. *Μονάδες 4*

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}$ (x f(x) ημ2x). *Μονάδες 7*

2002.

Δ1. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο [α, β]. Να αποδείξετε ότι αν h(x) > g(x) για κάθε x $\in$ [α, β], τότε και $\int_\alpha^\beta h(x)dx>\int_\alpha^\beta g(x)dx$. *Μονάδες 2*

Δ2. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις: $f(x)-e^{-f(x)}=x-1$ x $\in$ R και f(0) = 0 .

i. Να εκφραστεί η f΄ ως συνάρτηση της f. *Μονάδες 5*

ii. Να δείξετε ότι $\dfrac{x}{2}<f(x)<xf'(x)$ για κάθε x > 0. *Μονάδες 12*

iii. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x = 0, x = 1 και τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4}<E<\frac{1}{2}f(1)$$. *Μονάδες 6*

2003.

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β] που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β). Αν ισχύει f(α) = f(β) = 0 και υπάρχουν αριθμοί γ∈(α, β), δ∈(α, β), έτσι ώστε f(γ)·f(δ)<0, να αποδείξετε ότι:

Δ1. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο διάστημα (α, β). *Μονάδες 8*

Δ2. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1)<0$ και $f''(\xi_2)>0$. *Μονάδες 9*

Δ3. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σ. καμπής της γραφικής παράστασης της f. *Μονάδες 8*

2005.

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση

$2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε x ∈ R και f(0) = 0.

Δ1. Να δειχθεί ότι: $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$. *Μονάδες 6*

Δ2. Να βρεθεί το: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}$. *Μονάδες 6*

Δ3. Δίδονται οι συναρτήσεις: $h(x) = \int_{-x}^{x} t^{2005} f(t)dt$ και $g(x) = \dfrac{x^{2007}}{2007}$ ~~Δείξτε ότι h(x) = g(x) για κάθε x ∈ R~~. Αν h(x) = g(x) τότε *Μονάδες 7*

Δ4. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005} f(t)dt = \dfrac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο (0,1). *Μονάδες 6*

2006.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} - \ln x$.

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f. *Μονάδες 8*

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της. *Μονάδες 5*

Δ3. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g(x)=lnx στο σημείο A(α, lnα) με α>0και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με β ∈ R ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης f(x)=0. *Μονάδες 9*

Δ4. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες. *Μονάδες 3*

2007.

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει f(0) > 0. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει g(x) > 0 για κάθε x ∈ [0, 1]. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$F(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt$, x ∈ [0, 1], $G(x) = \int_0^x g(t)dt$, x ∈ [0, 1].

Δ1. Να δειχθεί ότι F(x) > 0 για κάθε x στο διάστημα (0, 1]. *Μονάδες 8*

Δ2. Να αποδειχθεί ότι: f(x)·G(x) > F(x) για κάθε x στο διάστημα (0, 1]. *Μονάδες 6*

Δ3. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\frac{F(x)}{G(x)} \le \frac{F(1)}{G(1)}$ για κάθε x στο διάστημα (0, 1]. *Μονάδες 4*

2008.

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο R για την οποία ισχύει $f(x) = \left(10x^3 + 3x\right)\int_0^2 f(t)dt - 45$

Δ1. Να αποδείξετε ότι f(x)=20x^3+6x−45 *Μονάδες 8*

Δ2. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο R . Να αποδείξετε ότι

$g''(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$ *Μονάδες 4*

Δ3. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος **1** και τη συνάρτηση g του ερωτήματος **2** ισχύει:

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$ και g(0)=g΄(0)=1, τότε

i. να αποδείξετε ότι g(x)=x^5+x^3+x+1 *Μονάδες 10*

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1–1 *Μονάδες 3*

2009.

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [0, 2] για την οποία ισχύει

$$\int_0^2 (t-2)\, f(t)dt = 0$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

• $H(x) = \int_0^x tf(t)dt, x \in [0,2]$

• $G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3, x \in (0,2] \\ 6\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}, x = 0 \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα [0, 2]. *Μονάδες 5*

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0, 2) και ότι ισχύει $G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}, 0 < x < 2$ *Μονάδες 6*

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός α∈(0, 2) τέτοιος ώστε να ισχύει Η(α)=0. *Μονάδες 7*

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός ξ ∈(0, α) τέτοιος ώστε να ισχύει $\alpha\int_0^{\xi} tf(t)dt = \xi^2\int_0^{\alpha} f(t)dt$ *Μονάδες 7*

2010.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f:R→R η οποία για κάθε x∈R ικανοποιεί τις σχέσεις:

$f(x) \neq x$ και $f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t}dt$

Δ5. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)-x}, x\in R$ *Μονάδες 5*

Δ6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\left(f(x)\right)^2-2xf(x), x\in R$, είναι σταθερή. *Μονάδες 7*

Δ7. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}, x\in R$ *Μονάδες 6*

Δ8. Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x+1} f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt, x\in R$ *Μονάδες 7*

2011.

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f,g:R→R, οι οποίες για κάθε x∈R ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $f(x)>0$ και $g(x)>0$
- $\dfrac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\dfrac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$
- $\dfrac{1-g(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\dfrac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$

Δ1. ~~Να αποδείξετε ότι~~: $f(x)=e^x, x\in R$, *Μονάδες 4*

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln f(x)}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}$ *Μονάδες 5*

Δ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=\int_1^x f(t^2)dt$ τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία με εξίσωση x=1. *Μονάδες 7*

2012.

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, η οποία για κάθε x>0 ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x)\neq 0$
- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt\geq\dfrac{x-x^2}{e}$
- $\ln x-x=-\left(\int_1^x\dfrac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)\cdot|f(x)|$

Δ1. ~~Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.~~ *Μονάδες 10*

Αν είναι $f(x)=e^{-x}(\ln x-x), x>0$ τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(f(x)\right)^2\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}-f(x)\right]$ *Μονάδες 5*

Δ3. Με την βοήθεια της ανισότητας $\ln x\leq x-1$ που ισχύει για κάθε x>0, να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, με x>0 και α>0 είναι κυρτή και

ii. $F(x)+F(3x)>2F(2x)$, για κάθε x>0 *Μονάδες 4*

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός β>0. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ∈ (β,2β) τέτοιο ώστε: $F(\beta)+F(3\beta)=2F(\xi)$ *Μονάδες 4*

2013.

Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (0, + ∞)
- f (1) = 1
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=\int_a^x \dfrac{f(t)-1}{t-1}dt,\ \ x\in(1,+\infty)$ και α > 1

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. f' (1) = 0 *(μονάδες 4)*, και ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ *(μονάδες 2).* *Μονάδες 6*

Δ2. η g είναι γν. αύξουσα *(μονάδες 3)*, και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο R

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du$$ *(μονάδες 6)* *Μονάδες 9*

Δ3. η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση $(a-1)\int_a^x \dfrac{f(t)-1}{t-1}dt=(f(a)-1)(x-a)$

με $x>1$ έχει ακριβώς μια λύση. *Μονάδες 10*

2014.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα. *Μονάδες 7*

Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι κυρτή.

Δ2. Ν.α.ο. η εξίσωση $\int_1^{2f'(x)} f(u)du=0$ έχει ακριβώς μία λύση, η οποία είναι η x=0 *Μονάδες 11*

Δ3. Ένα υλικό σημείο Μ ξεκινά τη χρονική στιγμή t=0 από ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0<0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x), x\geq x_0$ με x=x(t), y=y(t), t≥0. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x(t) του σημείου Μ είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του y(t), αν υποτεθεί ότι x'(t) > 0 για κάθε t≥0.

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(xf(x)+1-e)^2(x-2)^2, x\in(0,+\infty)$. Ν.α.ο. η συνάρτηση g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου. *Μονάδες 7*

2015.

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύουν:

$f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x\in R$ Μονάδες 5

Δ2. α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της C_f. Μονάδες 3

β)Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_f, την ευθεία $y=x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$. Μονάδες 4

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ln|f(x)|\right]$ Μονάδες 6

2016.

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x dx=\pi$
- $f(R)=R$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=1$
- $e^{f(x)}+x=f\left(f(x)\right)+e^x$ για κάθε x ∈ R.

Δ1. Να δείξετε ότι f(π) = π (μονάδες 4) και $f'(0)=1$ (μονάδες 3). Μονάδες 7

Δ2. α)Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο R. (μονάδες 4)

β)Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R . (μονάδες 2)

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$ Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι $0<\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$. Μονάδες 6

2017.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4} & ,x\in[-1,0)\\ e^x\eta\mu x & ,x\in[0,\pi]\end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [-1,π] και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της. Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γρ.παράσταση της f, τη γρ. παράσταση της g, με $g(x)=e^{5x}$ x∈R, τον άξονα y'y και την ευθεία x=π . Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}$

2018.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-a}-x^2$, $x\in R$ με $\alpha>1$

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του α >1 η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής. Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$, τέτοια ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2. Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=f(1) είναι αδύνατη στο (α,x_2). Μονάδες 6

Δ4. Αν α=2 να αποδείξετε ότι: $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx>-\frac{32}{15}$ Μονάδες 9

2019.

Δίνονται η συνάρτηση f:R→R με τύπο f(x) = (x - 1) ln(x^2 - 2x +2) +αx + β όπου α,β∈R, και η ευθεία (ε): y = -x +2, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της A(1, 1).

Δ1. Να αποδείξετε ότι α = -1 και β = 2. Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες x = 1 και x = 2. Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι f' (x) ≥ -1, για κάθε x ∈ R. Μονάδες 3

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\cdot ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2}$ για κάθε λ∈R. Μονάδες 5

Δ5. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g(x) = -x^3 -x +2, x ∈ R έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της. Μονάδες 8

2020. (ΝΕΟ)

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^x+x^2-ex-1$

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x_0)=x_0^2-(e+2)x_0+e-1$. Μονάδες 7

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}\right]+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)$ όπου x_0 το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Μονάδες 6

Δ3. Αν x_0 το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+x=x_0$ για $x\in(x_0,1)$, έχει μοναδική ρίζα ρ. Μονάδες 5

Δ4. Αν x_0 το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να αποδείξετε ότι $f(x_0)>f(\rho)(f'(k)+1)$ για κάθε $k\in(\rho,1)$. Μονάδες 7

2020. (ΠΑΛΑΙΟ)

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x)=xlnx-ln(\lambda x)$, $x\in(0,+\infty)$, $\lambda\in(0,+\infty)$ και

$g(x)=x^x$, $x\in(0,+\infty)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$, το οποίο και να βρείτε. Στην συνέχεια, να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο ακρότατου της f, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $(0, +\infty)$. Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει $x^x \geq \lambda x$, για κάθε $x > 0$. Μονάδες 5

Για τα ερωτήματα Δ3 και Δ4 θεωρήστε ότι $\lambda = 1$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της γρ. παράστασης C_g της g, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Μονάδες 6

Δ4. Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} x^x, x > 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι:

i. Η h είναι συνεχής. Μονάδες 3

ii. Η εξίσωση $x^{2020}\left(3 - 2\int_1^2 g(t)dt\right) + (1 - x)\int_0^1 h(1 - t)dt = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$. Μονάδες 6

2021.

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $lnx = \frac{1}{x}$ (1)έχει μοναδική ρίζα, x_0, η οποία ανήκει στο $(1, e)$ Μονάδες 4

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ έχει τύπο $f(x) = (lnx_0) \cdot (x + 1) - lnx - 1$

Δ2. Να δείξετε ότι η συν. f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0, το $f(x_0) = 0$ Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x \cdot e^{-x}, x \in \mathbb{R} \qquad \text{και} \qquad h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}, x \in \mathbb{R}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη. Μονάδες 8

Δ4. Έστω η συνάρτηση $\varphi: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, συνεχής, με $f(x) > \varphi(x)$ για κάθε $x > 0$. Θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(x, \varphi(x))$ με $x > 0$. Αν η απόσταση των σημείων A και B γίνεται ελάχιστη στο $x = x_0$, να δείξετε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ. Μονάδες 7

2022.

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x - \ln(3x)$

Δ1. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$ μονάδες 6

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. μονάδες 2

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2, είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα **Δ1**.

Δ2. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι: $E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$ μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $f(2 - x_1) < 0$ μονάδες 4

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x) + ln3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ μονάδες 6

2023.

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,2) \to \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-2x}{x-1} = l \in \mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$. μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{1}{3}$. μονάδες 6

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο **Δ2**

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0,1)$, στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$. μονάδες 6

Δ4. Αν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα $(0,2)$ με $F(x_1) = G(x_2) = 0$, να αποδείξετε ότι:

i. $F(x_2) + G(x_1) = 0$ μονάδες 4

ii. η εξίσωση $x_1 F(x) + x_2 G(x) = x_1 + x_2 - 2x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (x_1, x_2). μονάδες 5