Ι. Θεώρημα Bolzano

Διατύπωση του θεωρήματος Bolzano

Αν
- f ορισμένη στο κλειστό [α,β]
- f συνεχής στο κλειστό [α,β]
- f(α) · f(β) < 0

ΤΟΤΕ

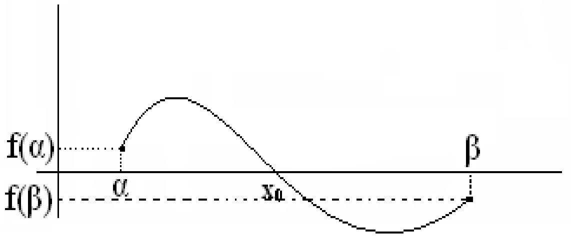
Υπάρχει **ένα τουλάχιστον** $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = 0$.

<u>ή εναλλακτικά</u>

Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α,β)

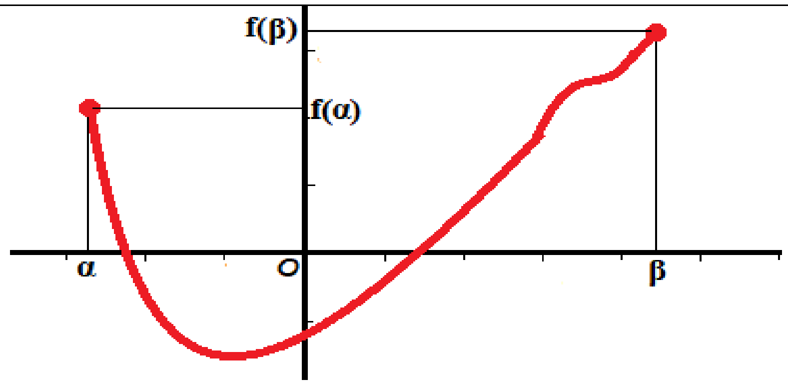
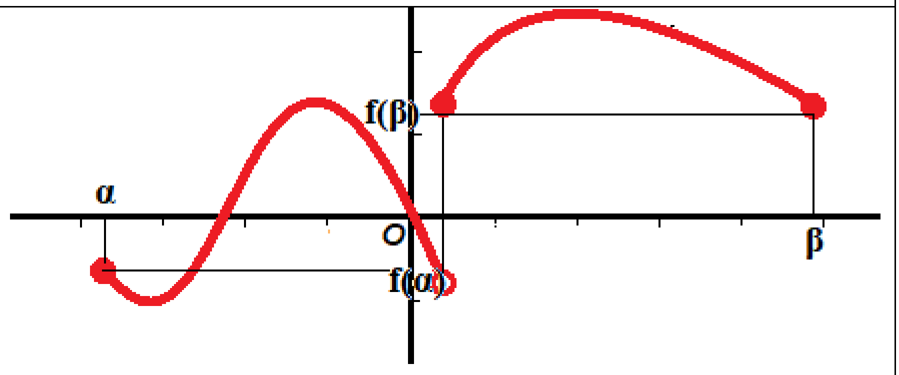
Γεωμετρική σημασία του θεωρήματος

Αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα (α,β).



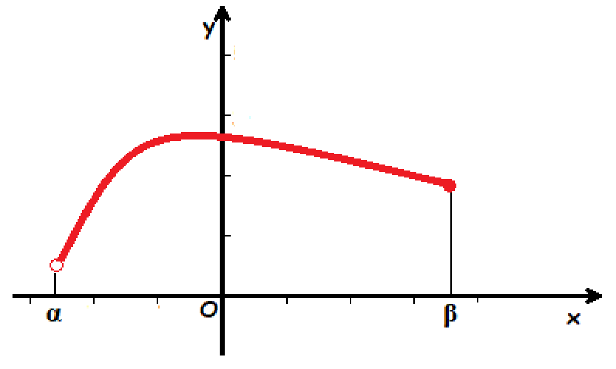
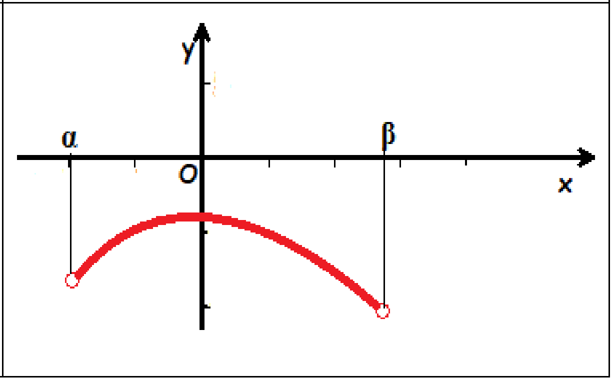
Παρατηρήσεις

1. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Δες τα παρακάτω παραδείγματα.

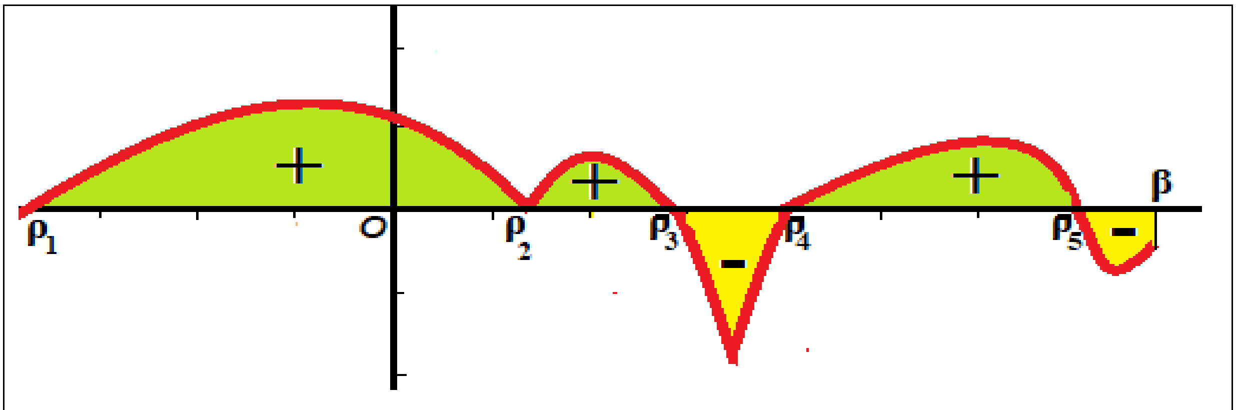
• Υπάρχει συνάρτηση f συνεχής στο [α,β], με ρίζα στο (α,β) χωρίς όμως να είναι $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$	
• Υπάρχει συνάρτηση f με ρίζα στο (α,β) και $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ η οποία δεν είναι συνεχής στο [α,β]	

2. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ (δηλ. $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$)

f είναι συνεχής στο $\Delta = (\alpha, \beta]$ και $f(x) \neq 0$	f είναι συνεχής στο $\Delta = (\alpha, \beta)$ και $f(x) \neq 0$

$f(x) > 0$	$f(x) < 0$
	

3. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα υποδιαστήματα, στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο **[α,β]** και

έχει ρίζες τις $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4 < \rho_5$

Παρατηρούμε ότι στα διαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες της διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Η τελευταία παρατήρηση διευκολύνει να προσδιορίσουμε το πρόσημο μιας συνεχούς συνάρτησης.

Παράδειγμα

Έστω η συνεχής συνάρτηση f με $x \in (-10, 11]$ και ρίζες $-3, 1, 7$.

Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών, από τον οποίο προκύπτει το πρόσημο

x	$-\infty$	-10		-3		1		7		11	$+\infty$
x_0			-5		0		3		8		
$f(x_0)$			$f(-5)>0$		$f(0)<0$		$f(3)<0$		$f(8)>0$		
Πρόσημο			$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$		

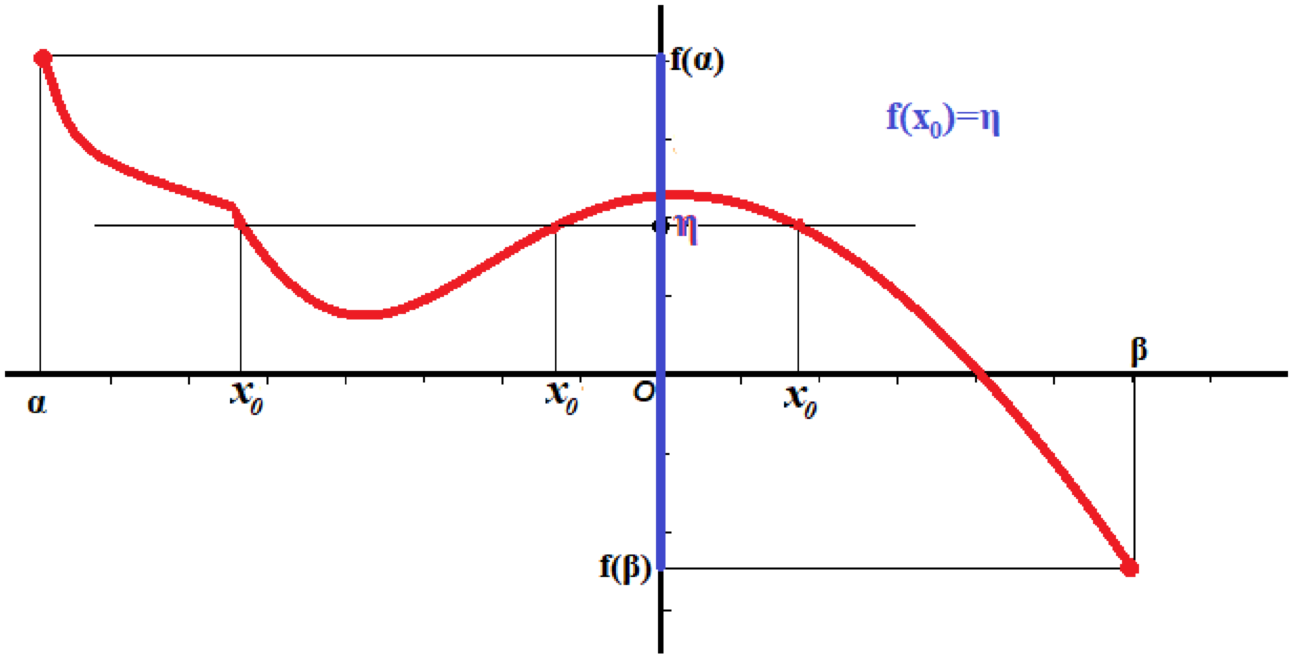
ΙΙ. Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Διατύπωση του θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών

Αν
- *f* ορισμένη στο κλειστό [α,β]
- *f* συνεχής στο κλειστό [α,β]
- *f(α)* ≠ *f(β)*

ΤΟΤΕ

Για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των **f(α)** και **f(β)** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = \eta$.



III. Θεώρημα Μεγίστης-Ελαχίστης Τιμής

Διατύπωση του θεωρήματος Μεγίστης-Ελαχίστης

Αν ***f*** συνεχής στο κλειστό [α,β] τότε

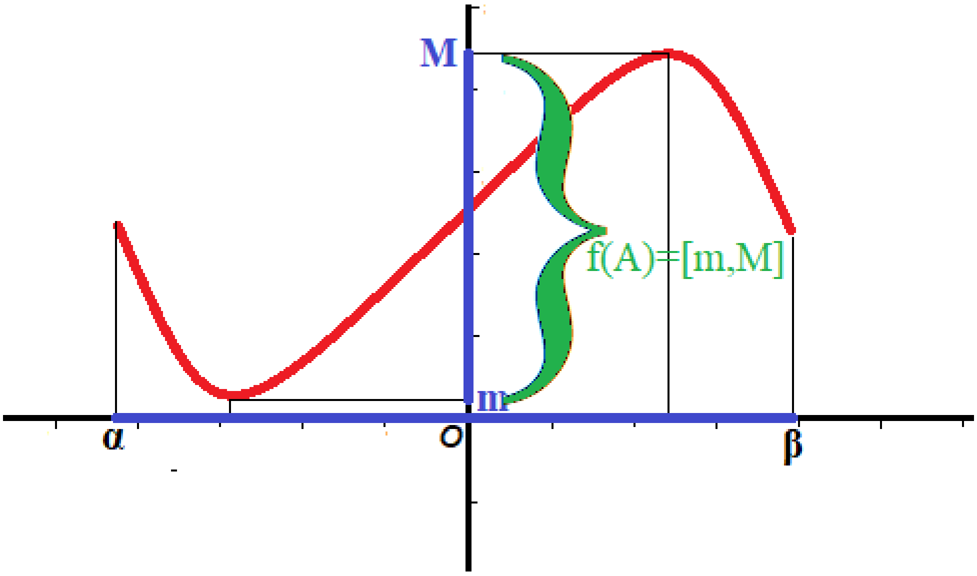
η f παίρνει στο [α, β] μια **μέγιστη** τιμή **Μ** και μια **ελάχιστη** τιμή **m**.

Δηλαδή,

- υπάρχουν x_1 , $x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

m ≤ f(x) ≤ M , για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

- το σύνολο τιμών **f(A)=[m , M]**



Συνέχεια σε διάστημα Δ + Μονοτονία ⇒ $f(\Delta)$

Πεδίο ορισμού Δ	Μονοτονία της f στο Δ	Σύνολο τιμών $f(\Delta)$
$\Delta = [\alpha, \beta]$	$f \uparrow$ στο Δ	$f(\Delta) = [f(\alpha), f(\beta)]$
	$f \downarrow$ στο Δ	$f(\Delta) = [f(\beta), f(\alpha)]$
$\Delta = (\alpha, \beta)$	$f \uparrow$ στο Δ	$f(\Delta) = (\lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x))$
	$f \downarrow$ στο Δ	$f(\Delta) = (\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x))$
$\Delta = [\alpha, \beta)$	$f \uparrow$ στο Δ	$f(\Delta) = [f(\alpha), \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x))$
	$f \downarrow$ στο Δ	$f(\Delta) = (\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x), f(\alpha)]$
$\Delta = (\alpha, \beta]$	$f \uparrow$ στο Δ	$f(\Delta) = (\lim\limits_{x \to a^+} f(x), f(\beta)]$
	$f \downarrow$ στο Δ	$(\Delta) = [f(\beta), \lim\limits_{x \to a^+} f(x))$