ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Α΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.Φλ3Θ(ε)

ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΦΥΣΙΚΗ**

Ημερομηνία: Τρίτη 5 Ιανουαρίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Στις ερωτήσεις από 1-4 να γράψετε στο τετράδιο σας τον αριθμό της ερώτησης και το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση.

Α1. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Κάποια χρονική στιγμή που η κίνηση του σώματος είναι επιταχυνόμενη:

α. ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας έχει αρνητική τιμή, ενώ ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας έχει θετική τιμή.
β. τόσο ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας όσο και ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας είναι μηδέν.
γ. ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής του ενέργειας έχει αρνητική τιμή, ενώ ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχει θετική τιμή.
δ. ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής του ενέργειας είναι μηδέν, ενώ ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας μέγιστος.

Μονάδες 5

Α2. Κατά την πλάγια ελαστική κρούση μιας μικρής σφαίρας, που κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, εκτελώντας μόνο μεταφορική κίνηση, με κατακόρυφο τοίχο:

α. η ορμή της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση είναι αντίθετη από την ορμή της λίγο πριν την κρούση.
β. η δύναμη που δέχεται η σφαίρα κατά την επαφή της με τον τοίχο μεταβάλλει την παράλληλη προς τον τοίχο συνιστώσα της ταχύτητας της σφαίρας.
γ. η ορμή της σφαίρας δεν μεταβάλλεται.
δ. η κινητική ενέργεια της σφαίρας δεν μεταβάλλεται.

Μονάδες 5

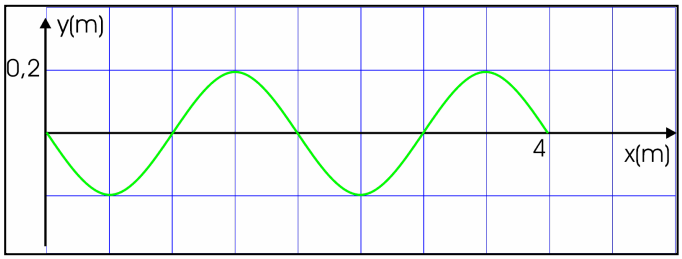
Α3. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας συχνότητας που εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση, γύρω από την ίδια θέση

ισορροπίας και έχουν ίδιο πλάτος Α και την ίδια αρχική φάση. Η σύνθετη κίνηση που προκύπτει έχει:

α. σταθερό πλάτος Α.
β. σταθερό πλάτος 2Α.
γ. πλάτος που αυξομειώνεται μεταξύ των τιμών 0 ως Α.
δ. πλάτος που αυξομειώνεται μεταξύ των τιμών 0 ως 2Α.

Μονάδες 5

Α4. Στο διπλανό διάγραμμα, που αναφέρεται σε εγκάρσιο αρμονικό κύμα, που διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα x, μπορεί να απεικονίζεται:



α. η χρονική μεταβολή της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας, ενός σημείου του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση x=4m.
β. ένα στιγμιότυπο του κύματος σε μια χρονική στιγμή που το κύμα έχει διαδοθεί μέχρι το σημείο x=4 m.
γ. ένα στιγμιότυπο του κύματος σε μια χρονική στιγμή που το κύμα έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση y=0,2 m.
δ. η χρονική μεταβολή της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας, ενός σημείου του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση y=0,2 m.

Μονάδες 5

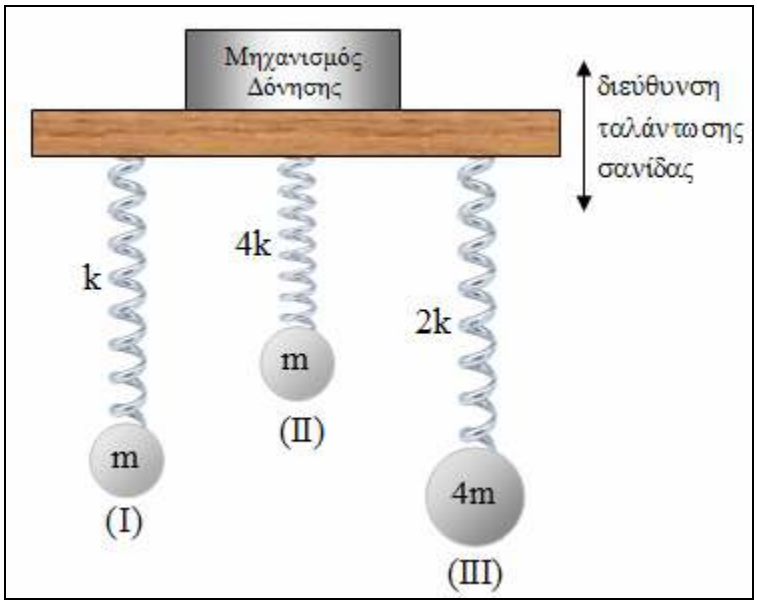
Α5. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη* ***Σωστό****, για τη σωστή πρόταση, και τη λέξη* ***Λάθος****, για τη λανθασμένη.*

α. Όταν η ολική ορμή ενός συστήματος δυο κινούμενων σωμάτων είναι μηδέν τότε και η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι μηδέν.
β. Όταν ένα μηχανικό κύμα μεταβαίνει από ένα ελαστικό μέσο (1) σε ένα ελαστικό μέσο (2), όπου διαδίδεται με μικρότερη ταχύτητα, το μήκος κύματος μειώνεται.
γ. Συμβολή κυμάτων συμβαίνει μόνο όταν αυτά έχουν το ίδιο μήκος κύματος.
δ. Δυο σημεία ενός ελαστικού μέσου στο οποίο έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα και ανάμεσα τους παρεμβάλλονται 3 δεσμοί, ταλαντώνονται με διαφορά φάσης π rad.
ε. Σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση με συγκεκριμένη συχνότητα διεγέρτη, το πλάτος ταλάντωσης είναι ανεξάρτητο από τη σταθερά απόσβεσης.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Β1. Στην οριζόντια σανίδα του παρακάτω σχήματος έχουμε προσαρμόσει τρία συστήματα μάζας – ελατηρίου με τα χαρακτηριστικά μεγέθη (μάζα σώματος – σταθερά ελατηρίου) που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Όλα τα σώματα αρχικά ισορροπούν. Μέσω κατάλληλου μηχανισμού δόνησης θέτουμε τη σανίδα σε εξαναγκασμένη ταλάντωση με συχνότητα που έχει τιμή $\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.



Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα μάζας-ελατηρίου, που θα ταλαντωθεί με το μέγιστο δυνατό πλάτος θα είναι το:

α. (I) **β.** (II) **γ.** (III)

Να θεωρήσετε ότι η επίδραση των αποσβέσεων είναι μικρή με αποτέλεσμα η συχνότητα συντονισμού κάθε συστήματος να ταυτίζεται με την ιδιοσυχνότητά του.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. (**Μονάδες 2**)

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. (**Μονάδες 5**)

Β2. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που γίνονται στην ίδια διεύθυνση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και έχουν ίδιο πλάτος και παραπλήσιες συχνότητες f_1, f_2. Στο χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ δυο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους της συνισταμένης ταλάντωσης, το σώμα εκτελεί Ν ταλαντώσεις. Διπλασιάζουμε τις συχνότητες και των δύο συνιστωσών ταλαντώσεων και θεωρούμε ότι και οι νέες συχνότητες είναι παραπλήσιες. Ο αριθμός των ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα, μεταξύ δυο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους της συνισταμένης ταλάντωσης, μετά το διπλασιασμό των συχνοτήτων γίνεται Ν΄. Ο λόγος $\frac{N}{N'}$ ισούται με:

α. $\frac{1}{2}$ **β.** 1 **γ.** 2

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. (**Μονάδες 2**)
Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. (**Μονάδες 7**)

Β3. Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων Π_1 και Π_2 που βρίσκονται στην επιφάνεια υγρού ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα και ίδιο πλάτος σύμφωνα με την εξίσωση y=Aημωt, δημιουργώντας εγκάρσια αρμονικά κύματα μήκους κύματος λ. Ένα σημείο Μ της επιφάνειας του υγρού απέχει από την πηγή Π_1 απόσταση $d_1=2\cdot\lambda$ ενώ από την πηγή Π_2 απόσταση d_2, τέτοια ώστε το κύμα να φθάνει στο Μ από αυτή με χρονική καθυστέρηση $3,25\cdot T$, σε σχέση με το κύμα από την Π_1. Το σημείο Μ μετά τη συμβολή των κυμάτων έχει μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης με μέτρο ίσο με:

α. $\sqrt{2}\cdot\omega\cdot A$ **β.** $2\cdot\omega\cdot A$ **γ.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\omega\cdot A$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. (**Μονάδες 2**)
Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. (**Μονάδες 7**)

Δίνεται: $\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{4}=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ΘΕΜΑ Γ

Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x΄Ox διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα, που περιγράφεται από την εξίσωση $y_1=A\eta\mu 2\pi\left(f\cdot t-\frac{x}{\lambda}\right)$, με ταχύτητα μέτρου $1,2\ \frac{m}{s}$.

Ένα σημείο Μ του μέσου, που βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα Ox, ταλαντώνεται υπό την επίδραση του κύματος με εξίσωση $y_M=0,3\eta\mu 2\pi(\alpha t-\beta)(S.I.)$, όπου α, β θετικές σταθερές.

Όταν στο ίδιο ελαστικό μέσο διαδίδεται ταυτόχρονα με το πρώτο και δεύτερο εγκάρσιο αρμονικό κύμα με εξίσωση $y_2=A\eta\mu 2\pi\left(ft+\frac{x}{\lambda}\right)$, η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Μ περιγράφεται από την εξίσωση: $\upsilon_M=1,2\pi\cdot\sigma\upsilon\nu 4\pi t$ (S.I.) και τότε μεταξύ της αρχής Ο του άξονα x΄Ox και του σημείου Μ βρίσκονται δυο σημεία που παραμένουν συνεχώς ακίνητα και ένα σημείο που ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος.

Γ1. Να γράψετε τις εξισώσεις των δυο εγκάρσιων αρμονικών κυμάτων και την εξίσωση που περιγράφει την ταλάντωση των σημείων του ελαστικού μέσου, συναρτήσει της θέσης τους (x) στον άξονα x΄Ox, και του χρόνου (t), για την περίπτωση που εντός του ελαστικού μέσου διαδίδονται ταυτόχρονα και τα δυο κύματα.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε πως το σημείο Μ βρίσκεται στη θέση του άξονα x΄Ox με τετμημένη $x = \frac{5\lambda}{6}$.

Μονάδες 7

Γ3. Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση στην οποία βρίσκεται το σημείο Μ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του, από το κοντινότερο προς αυτό σημείο του μέσου που παραμένει ακίνητο.

Μονάδες 6

Μεταβάλλουμε τη συχνότητα των κυμάτων (χωρίς μεταβολή του πλάτους τους) έτσι ώστε το σημείο Μ να είναι το πρώτο μετά την αρχή Ο, σημείο του άξονα που ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος. Υπολογίστε:

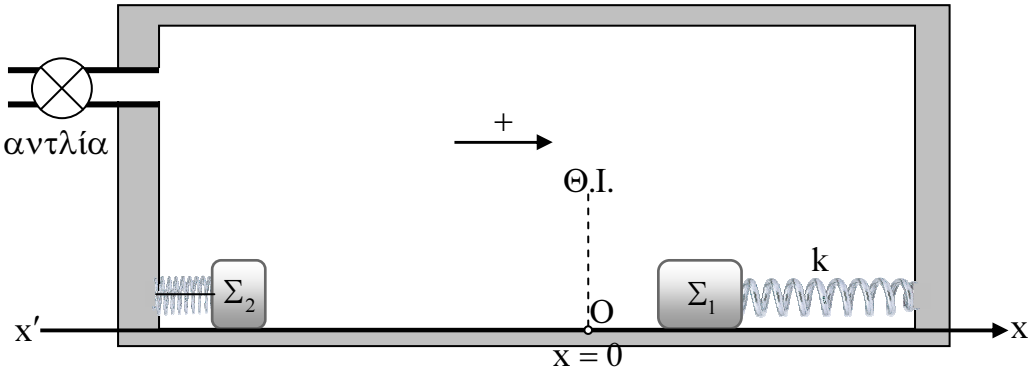
Γ4. το ποσοστό μεταβολής της συχνότητας των κυμάτων και το λόγο της ενέργειας ταλάντωσης του σημείου Μ πριν τη μεταβολή της συχνότητας των κυμάτων, προς την ενέργεια ταλάντωσής του μετά τη μεταβολή της συχνότητας.

Μονάδες 6

Δίνεται: $\sqrt{925} \simeq 30,4$

ΘΕΜΑ Δ

Σώμα Σ_1 μάζας m_1 είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=160N/m, το άλλο άκρο του οποίου, είναι δεμένο στο κατακόρυφο τοίχωμα ενός κλειστού δοχείου, από το οποίο έχει αφαιρεθεί ο αέρας μέσω αντλίας κενού.



Δεύτερο ελατήριο, που έχει το ένα του άκρο δεμένο στο απέναντι κατακόρυφο τοίχωμα του δοχείου, συγκρατείται συσπειρωμένο μέσω νήματος, ενώ το άλλο άκρο του βρίσκεται σε επαφή με ακίνητο σώμα Σ_2 μάζας m_2=0,6kg. Το Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση κινούμενο πάνω στην οριζόντια και απολύτως λεία βάση του δοχείου, η διεύθυνση της οποίας ταυτίζεται με τη διεύθυνση του άξονα κίνησης xΟx. Η ταλάντωση εξελίσσεται έτσι ώστε κατά τη διάρκειά της, το Σ_1 να μην συγκρούεται με το Σ_2. Ως αρχή Ο του άξονα της κίνησης, x=0, ορίζουμε τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης και θετική φορά όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα:

Η απόσταση των ακραίων θέσεων της ταλάντωσης είναι ίση με 0,8m και κατά τη διάρκειά της το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας κάθε 0,25s. Τη χρονική στιγμή που θεωρούμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου (t=0), το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 0,2\sqrt{3}$ m και το μέτρο της ταχύτητάς του αυξάνεται.

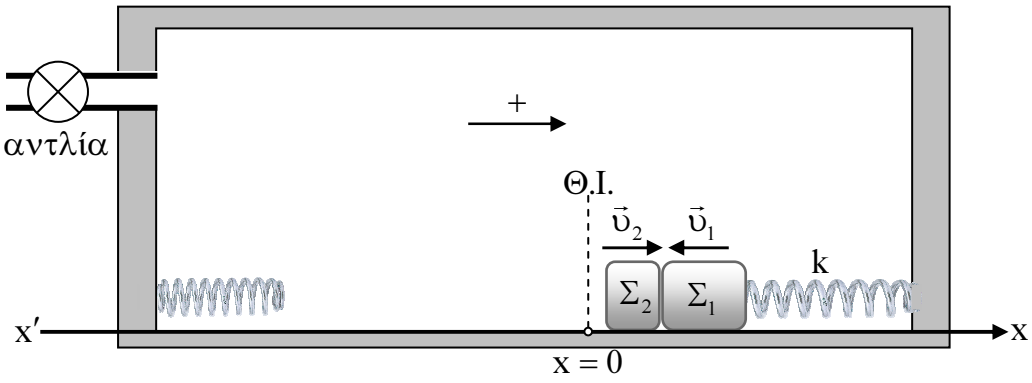
Δ1. Να γράψετε τη σχέση που δίνει την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο.

Μονάδες 7

Δ2. Να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή που πλησιάζοντας τη θέση ισορροπίας, διέρχεται από θέση στην οποία η δύναμη επαναφοράς έχει αλγεβρική τιμή -51,2 N.

Μονάδες 7

Κάποια στιγμή το νήμα, που συγκρατεί το αριστερό ελατήριο συσπειρωμένο, κόβεται και το Σ_2 αρχίζει να κινείται προς το Σ_1, χάνοντας την επαφή του με το ελατήριο όταν αυτό αποκτήσει το φυσικό του μήκος. Τα δυο σώματα συγκρούονται πλαστικά τη στιγμή που η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του Σ_1 ισούται με -0,96π m/s και κινείται στον θετικό ημιάξονα, ενώ το Σ_2 κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$.



Το ποσοστό απώλειας μηχανικής ενέργειας του συστήματος των δυο σωμάτων κατά την κρούση είναι 100%.

Δ3. Να υπολογίσετε το μέτρο $|\upsilon_2|$ της ταχύτητας, με την οποία προσκρούει το Σ_2 στο σώμα Σ_1.

Μονάδες 5

Αμέσως μετά την σύγκρουση εισάγεται ακαριαία αέρας στο δοχείο, με αποτέλεσμα η ταλάντωση που ακολουθεί να είναι φθίνουσα. Εάν η δύναμη απόσβεσης που προκαλεί η ύπαρξη του αέρα στο δοχείο, είναι της μορφής F΄=-bυ και η σταθερά Λ έχει τιμή $\frac{\ln 2}{\pi} s^{-1}$:

Δ4. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης μετά από 10 πλήρεις ταλαντώσεις. Θεωρήστε ότι η επίδραση των αποσβέσεων είναι τέτοια ώστε η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης να μπορεί να θεωρηθεί ίση με αυτή της αμείωτης απλής αρμονικής.

Μονάδες 6

Δίνονται: $\eta\mu\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\pi^2 = 10$, $\sqrt{576}=24$.

ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΦΥΣΙΚΗ**

Ημερομηνία: Τρίτη 5 Ιανουαρίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. ➔ γ
Α2. ➔ δ
Α3. ➔ β
Α4. ➔ β

Α5. **α** – ΛΑΘΟΣ
β – ΣΩΣΤΟ
γ – ΛΑΘΟΣ
δ – ΣΩΣΤΟ
ε – ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

Β1. **Σωστή απάντηση η (β)**

Η ιδιοσυχνότητα καθενός από τα τρία συστήματα μάζας – ελατηρίου είναι:

$$f_{0(I)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f_{0(II)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{m}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f_{0(III)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{4m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}}$$

Παρατηρούμε ότι η ιδιοσυχνότητα του συστήματος (ΙΙ) είναι ίση με τη συχνότητα του διεγέρτη. Συνεπώς το σύστημα (ΙΙ) θα βρεθεί σε κατάσταση συντονισμού, με αποτέλεσμα να ταλαντώνεται με το μέγιστο δυνατό πλάτος.

Β2. **Σωστή απάντηση η (β)**

Όταν ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που γίνονται στην ίδια διεύθυνση, γύρω από το ίδιο σημείο ισορροπίας με ίδιο πλάτος και παραπλήσιες συχνότητες f_1, f_2 προκύπτει μια ιδιόμορφη ταλάντωση με σταθερή περίοδο και μεταβλητό πλάτος ή αλλιώς λέμε πως η κίνηση παρουσιάζει διακροτήματα.

Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους είναι η περίοδος του διακροτήματος που υπολογίζεται από τη σχέση:

$T_\delta = \dfrac{1}{|f_1 - f_2|}$ ενώ για την συχνότητα της ταλάντωσης του σώματος θα ισχύει: $\overline{\omega_T} = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ ή $2\pi f_T = \dfrac{2\pi f_1 + 2\pi f_2}{2}$ ή $f_T = \dfrac{f_1 + f_2}{2}$ και επομένως $T_T = \dfrac{2}{f_1 + f_2}$.

Το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα στη διάρκεια της περιόδου του διακροτήματος είναι:

$$N = \frac{T_\delta}{T_T} = \frac{\dfrac{1}{|f_1 - f_2|}}{\dfrac{2}{f_1 + f_2}} = \frac{f_1 + f_2}{2|f_1 - f_2|} \quad (1)$$

Όταν διπλασιάζουμε τις συχνότητες έχουμε $f_1' = 2f_1$ και $f_2' = 2f_2$, οπότε για την νέα ιδιόμορφη ταλάντωση θα ισχύουν:

$$T_\delta' = \frac{1}{|f_1' - f_2'|} = \frac{1}{|2f_1 - 2f_2|} = \frac{1}{2|f_1 - f_2|} \text{ και}$$

$$T_T' = \frac{2}{f_1' + f_2'} = \frac{2}{2f_1 + 2f_2} = \frac{2}{2(f_1 + f_2)} = \frac{1}{f_1 + f_2}$$

οπότε το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα στη διάρκεια της νέας περιόδου διακροτήματος,θα ισχύει:

$$N' = \frac{T_\delta'}{T_T'} = \frac{\dfrac{1}{2|f_1 - f_2|}}{\dfrac{1}{f_1 + f_2}} = \frac{f_1 + f_2}{2|f_1 - f_2|} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\dfrac{N}{N'} = 1$

Β3. **Σωστή απάντηση η (α)**

Αν υ_δ η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων, η χρονική καθυστέρηση είναι:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{d_2}{\upsilon_\delta} - \frac{d_1}{\upsilon_\delta} = \frac{d_2 - d_1}{\upsilon_\delta} \text{ ή } \upsilon_\delta \cdot \Delta t = d_2 - d_1 \text{ ή } d_2 = d_1 + \upsilon_\delta \cdot \Delta t \text{ ή}$$

$$d_2 = 2 \cdot \lambda + \frac{\lambda}{T} \cdot 3,25 \cdot T \text{ ή } d_2 = 5,25 \cdot \lambda$$

Η εξίσωση του πλάτους της ταλάντωσης του σημείου Μ μετά τη συμβολή είναι:

$$|A'_M| = \left|2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left[\frac{\pi}{\lambda} \cdot (d_1 - d_2)\right]\right| \quad \text{ή}$$

$$|A'_M| = 2A \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\left[\frac{\pi}{\lambda} \cdot (2 \cdot \lambda - 5,25 \cdot \lambda)\right]\right|$$

$$|A'_M| = 2A \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\left[\frac{\pi}{\lambda} \cdot (-3,25 \cdot \lambda)\right]\right| \quad \text{ή} \quad |A'_M| = 2A \cdot |\sigma\upsilon\nu(-3,25 \cdot \pi)|$$

$$|A'_M| = 2A \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right| \quad \text{ή} \quad |A'_M| = 2A \cdot \left|-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right| \text{ ή}$$

$$|A'_M| = 2A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } |A'_M| = A \cdot \sqrt{2}$$

Επομένως $\upsilon_{M(max)} = \omega \cdot |A'_M|$ ή $\boxed{\upsilon_{M(max)} = \omega \cdot A \cdot \sqrt{2}}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από την εξίσωση $y_M = 0,3\eta\mu 2\pi(\alpha t - \beta)(S.I.)$ προκύπτει: $A = 0,3m$

Όταν στο μέσο διαδίδονται και τα δυο κύματα, δημιουργείται στάσιμο κύμα. Από την εξίσωση $\upsilon_M = 1,2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 4\pi t\ (S.I.)$, προκύπτει $\omega = 4\pi$ rad/s.

Η συχνότητα ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου είναι ίδια, είτε διαδίδεται το ένα, είτε και τα δυο κύματα, οπότε:

$$\omega = 2\pi f \text{ ή } f = \frac{\omega}{2\pi} \text{ ή } f = \frac{4\pi}{2\pi} \text{ ή } \underline{f = 2Hz}$$

Ισχύει επίσης: $\upsilon_\delta = \lambda f$ ή $\lambda = \frac{\upsilon_\delta}{f}$ ή $\lambda = \frac{1,2}{2}$ ή $\underline{\lambda = 0,6m}$

όπου υ_δ η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων.

Επομένως οι εξισώσεις των δυο τρεχόντων κυμάτων είναι:

$$y_1 = 0,3\eta\mu 2\pi\left(2t - \frac{x}{0,6}\right) \text{ ή } \boxed{y_1 = 0,3\eta\mu 2\pi\left(2t - \frac{5x}{3}\right)(S.I.)}$$

$$y_2 = 0,3\eta\mu 2\pi\left(2t + \frac{x}{0,6}\right) \text{ ή } \boxed{y_2 = 0,3\eta\mu 2\pi\left(2t + \frac{5x}{3}\right)(S.I.)}$$

Η εξίσωση ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου κατά την ταυτόχρονη διάδοση και των δυο κυμάτων, ή αλλιώς η εξίσωση του στάσιμου κύματος θα είναι:

$$y = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\eta\mu\frac{2\pi t}{T} \text{ ή } y = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\eta\mu\omega t \text{ ή}$$

$$y = 0,6\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{0,6}\cdot\eta\mu 4\pi t$$

$$\boxed{y = 0,6\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{10\pi x}{3}\cdot\eta\mu 4\pi t(S.I.)}$$

Γ2. Όταν στο ελαστικό μέσο αποκατασταθεί στάσιμο κύμα, η εξίσωση ταλάντωσης κάθε σημείου έχει τη μορφή:

$y = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$ η οποία, θέτοντας $A' = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}$, γράφεται: $y = A'\cdot\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$

αν $A' > 0$: $y = |A'|\cdot\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$

αν $A' < 0$**:** $y = -|A'|\cdot\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$ ή $y = |A'|\cdot\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} + \pi\right)$

Η ταχύτητα ταλάντωσης του κάθε σημείου θα περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\upsilon = \omega|A'|\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi t}{T} \text{ όταν } A' > 0\text{, ή}$$

$$\upsilon = \omega|A'|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi t}{T} + \pi\right) \text{ όταν } A' < 0$$

Συγκρίνοντας την εξίσωση $\upsilon_M = 1,2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 4\pi t$ (S.I.) που μας δόθηκε, με τις παραπάνω προκύπτει πως:

- $A'_M > 0$ &
- $\omega A'_M = 1,2\pi$ ή $4\pi A'_M = 1,2\pi$ ή $A'_M = 0,3m$ (δηλ. $A'_M = A$)

Όμως:

$$A'_M = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x_M}{\lambda} \text{ ή } A = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x_M}{\lambda} \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x_M}{\lambda} = \frac{1}{2} \text{ ή}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x_M}{\lambda} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$$

οπότε: $\frac{2\pi x_M}{\lambda} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ή $x_M = k\lambda \pm \frac{\lambda}{6}$ $(k \in \mathbb{Z})$ (1)

Γνωρίζουμε επίσης πως:

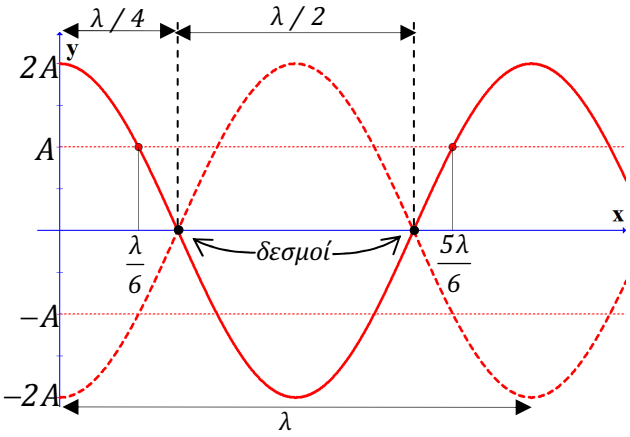
- $x_M > 0$ (αφού βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα),
- μεταξύ της αρχής του άξονα Ο (που θα είναι κοιλία) και του Μ υπάρχουν **δυο δεσμοί και μια κοιλία**. Δεδομένου πως η απόσταση κοιλίας δεσμού είναι λ/4 και η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών δεσμών είναι λ/2, θα πρέπει:

  $x_M > \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2}$ ή $x_M > \frac{3\lambda}{4}$ ή $x_M > \frac{9\lambda}{12}$

  και

  $x_M < \lambda$ (αφού στη θέση x=λ έχουμε τη 2η κοιλία μεταξύ Ο και Μ).

Επομένως πρέπει: $\frac{9\lambda}{12} < x_M < \lambda$



Θέτοντας στην εξίσωση (1) **k=0**, παίρνουμε:

$x_M = -\frac{\lambda}{6}$ (απορ.) ή $x_M = \frac{\lambda}{6} = \frac{2\lambda}{12}$ (απορ. αφού είναι $< \frac{3\lambda}{4} = \frac{9\lambda}{12}$)

Θέτοντας στην εξίσωση (1) **k=1**, παίρνουμε:

$x_M = \lambda + \frac{\lambda}{6}$ (απορ.) ή $\boxed{x_M = \frac{5\lambda}{6}}$ $(= \frac{10\lambda}{12}$, δεκτή)

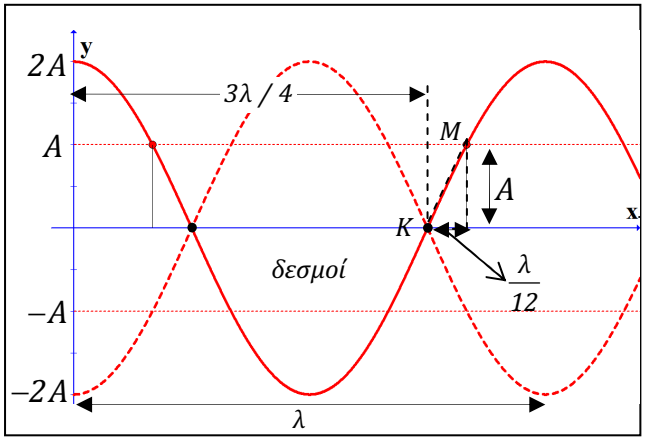
$$\text{Άρα: } x_M = \frac{5 \cdot 0,6}{6} \Rightarrow x_M = 0,5\text{m}$$

Γ3. Ο πλησιέστερος στο Μ δεσμός είναι αυτός που βρίσκεται στη θέση x=3λ/4. Τον ονομάζουμε Κ.

Το Μ βρίσκεται στην ελάχιστη απόστασή του από τον δεσμό Κ, τη στιγμή που και όλα τα σημεία διέρχονται από τη θέση ισορροπίας. Συνεπώς η ελάχιστη απόσταση είναι:

$(KM)_{min} = x_M - x_K = \frac{5\lambda}{6} - \frac{3\lambda}{4} = \frac{10\lambda}{12} - \frac{9\lambda}{12}$ ή $(KM)_{min} = \frac{\lambda}{12} = \frac{0,6}{12}$ ή

$\boxed{(KM)_{min} = 0,05\text{ m}}$



Με βάση το παραπάνω σχήμα προκύπτει:

$$(KM)_{max} = \sqrt{A^2 + \left(\frac{\lambda}{12}\right)^2} \quad \text{ή}$$

$$(KM)_{max} = \sqrt{0,3^2 + 0,05^2} = \sqrt{\left(30 \cdot 10^{-2}\right)^2 + \left(5 \cdot 10^{-2}\right)^2} \text{ ή}$$

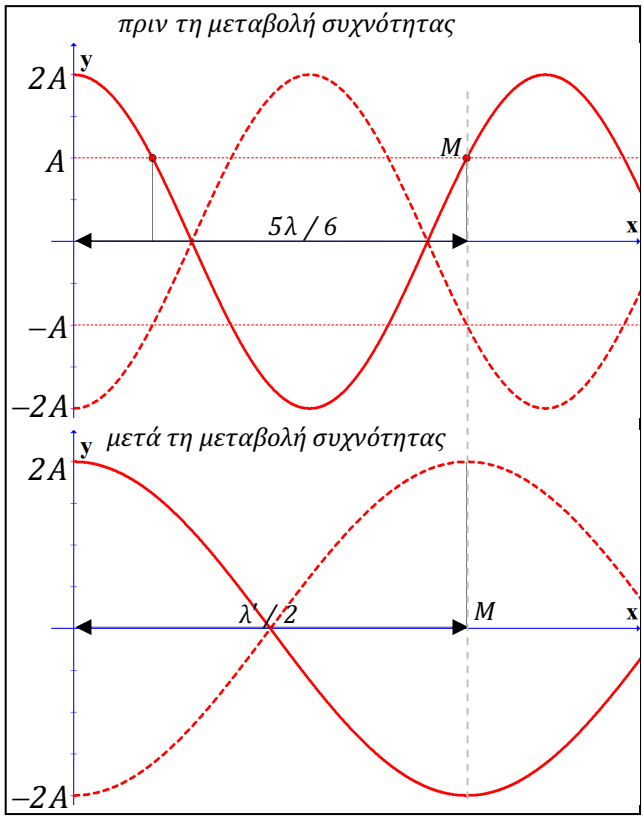
$(KM)_{max} = \sqrt{925 \cdot 10^{-4}} = 30,4 \cdot 10^{-2}$ ή $\boxed{(KM)_{max} = 0,304\text{ m}}$

Γ4. Όταν η συχνότητα των κυμάτων μεταβληθεί, το Μ θα είναι η $1^{η}$ κοιλία στον θετικό ημιάξονα Ox, μετά την κοιλία στο σημείο Ο. Με τη μεταβολή της συχνότητας δεν μεταβάλλεται η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων, που εξαρτάται μόνο από το μέσο διάδοσης. Συνεπώς (βλέπε σχήμα παρακάτω) ισχύει:

$$\frac{5\cdot\lambda}{6}=\frac{\lambda'}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{5}{6}\frac{\upsilon_K}{f}=\frac{1}{2}\frac{\upsilon_K}{f'} \quad \text{ή} \quad f'=\frac{3}{5}f \quad \text{ή} \quad f'=0,6f$$

Συνεπώς το ποσοστό μεταβολής της συχνότητας είναι:

$$\Pi_f=\frac{f'-f}{f}100\% \quad \text{ή} \quad \Pi_f=\frac{0,6f-f}{f}100\% \quad \text{ή} \quad \boxed{\Pi_f=-40\%}$$



Ο ζητούμενος λόγος θα είναι:

$$\frac{E_M}{E'_M}=\frac{\frac{1}{2}m\omega^2A_M^2}{\frac{1}{2}m\omega'^2A_M'^2} \text{ ή } \frac{E_M}{E'_M}=\frac{4\pi^2f^2A_M^2}{4\pi^2f'^2A_M'^2} \text{ ή } \frac{E_M}{E'_M}=\left(\frac{f}{f'}\right)^2\left(\frac{A_M}{A'_M}\right)^2 \text{ ή}$$

$$\frac{E_M}{E'_M}=\left(\frac{f}{0,6f}\right)^2\left(\frac{A}{2A}\right)^2 \text{ ή}$$

$$\frac{E_M}{E'_M}=\frac{1}{0,36\cdot 4} \text{ ή } \frac{E_M}{E'_M}=\frac{100}{36\cdot 4} \text{ ή }$$

$$\boxed{\frac{E_M}{E'_M}=\frac{25}{36}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στη διάρκεια της ταλάντωσης το σώμα διέρχεται από τη Θ.Ι. κάθε μισή περίοδο άρα με βάση τα δεδομένα, θα είναι $\frac{T}{2}=0,25s$ ή T=0,5s.

Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης θα είναι:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0,5} \text{ ή } \underline{\omega=4\pi\,\frac{rad}{s}}$$

Η απόσταση d, μεταξύ των ακραίων θέσεων της ταλάντωσης ισούται με 2Α και έτσι:

$$d=2A \text{ ή } A=\frac{d}{2} \text{ ή } A=\frac{0,8}{2} \text{ ή } \underline{A=0,4\ m}$$

Γνωρίζουμε ότι την t=0: $x=0,2\sqrt{3}\ m$ και αφού επιταχύνεται θα κινείται προς τη Θ.Ι οπότε υ<0

Γενικά: $x=A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_o)\xrightarrow[x=0,1\sqrt{3}m]{t=0}0,2\sqrt{3}=0,4\cdot\eta\mu\varphi_0$ ή

$$\eta\mu\varphi_0=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ή } \eta\mu\varphi_0=\eta\mu\frac{\pi}{3}\text{, άρα:}$$

$$\varphi_0=2k\pi+\frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad \varphi_0=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \quad k\in\mathbb{Z}$$

Δεχόμαστε: $0\le\varphi_0<2\pi$. Θέτοντας k=0 παίρνουμε:

$$\varphi_0=\frac{\pi}{3}rad \quad \text{ή} \quad \varphi_0=\frac{2\pi}{3}rad$$

ενώ κάθε άλλη τιμή του k, δίνει φ_0 εκτός της δεκτής περιοχής τιμών.

Γνωρίζουμε επίσης ότι για t=0:

$$\upsilon<0 \text{ ή } \upsilon_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi_0<0\xrightarrow{\upsilon_{max}>0}\sigma\upsilon\nu\varphi_0<0$$

Άρα: $\underline{\varphi_0=\frac{2\pi}{3}rad}$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$\boxed{x = 0,4 \cdot \eta\mu\left(4\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)(S.I.)}$$

Δ2. Γνωρίζοντας την αλγεβρική τιμή της δύναμης επαναφοράς, υπολογίζουμε την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας:

$\Sigma F = -Dx \xrightarrow{D=k} \Sigma F = -kx$ ή στη θέση που μας ενδιαφέρει:

$$x_1 = -\frac{\Sigma F}{k} = -\frac{(-51,2)}{160} \text{ ή } \underline{x_1 = 0,32 \text{ m}}$$

Επειδή όμως η ενέργεια της ταλάντωσης παραμένει σταθερή, η ενέργεια ταλάντωσης στη θέση που μας ενδιαφέρει (x_1) θα είναι ίση με την ενέργεια της ταλάντωσης στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης (Θ.Μ.Α):

$E_{(\Theta.M.A)} = E_{(x_1)}$ ή $\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2$ ή $m\omega^2A^2 = m\upsilon_1^2 + m\omega^2x_1^2$

$\upsilon_1^2 = \omega^2A^2 - \omega^2x_1^2$ ή $\upsilon_1^2 = \omega^2\left(A^2 - x_1^2\right)$ ή $\upsilon_1 = \pm\omega\sqrt{A^2 - x_1^2}$

$\upsilon_1 = \pm 4\pi\sqrt{0,4^2 - 0,32^2} = \pm 4\pi\sqrt{\left(40\cdot 10^{-2}\right)^2 - \left(32\cdot 10^{-2}\right)^2}$ ή

$\upsilon_1 = \pm 4\pi\sqrt{(1600 - 1024)\cdot 10^{-4}}$ ή

$\upsilon_1 = \pm 4\pi\sqrt{576\cdot 10^{-4}} = \pm 4\pi 24\cdot 10^{-2} = \pm 0,96\pi \frac{m}{s} \xrightarrow[\text{πλησιάζει τη Θ.Ι.}]{x_1>0}$

$\boxed{\upsilon_1 = -0,96\pi \frac{m}{s}}$

Δ3. Από τη σταθερά επαναφοράς της αρχικής ταλάντωσης του συστήματος m_1-k, υπολογίζουμε την m_1:

$$D = m_1\cdot\omega^2 \xrightarrow{D=k} m_1 = \frac{k}{\omega^2} \text{ ή } m_1 = \frac{160}{16\pi^2} \text{ ή } \underline{m_1 = 1 \text{ kg}}$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο στον άξονα x΄x για το σύστημα των Σ_1-Σ_2:

$\vec{P}_{ολ} = \vec{P}'_{ολ}$ ή $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}'_{12}$ και εφόσον το ποσοστό απώλειας μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση είναι 100% το συσσωμάτωμα θα έχει μηδενική ταχύτητα αμέσως μετά την κρούση, οπότε:

$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{0}$ ή αλγεβρικά $m_2|\upsilon_2| - m_1|\upsilon_1| = 0$ ή $m_2|\upsilon_2| = m_1|\upsilon_1|$ ή

$$|\upsilon_2| = \frac{m_1|\upsilon_1|}{m_2} \text{ ή } |\upsilon_2| = \frac{0,96\pi}{0,6} = \frac{96\pi}{6\cdot 10} = \frac{4\cdot 24\pi}{6\cdot 10} \text{ ή } \boxed{|\upsilon_2| = 1,6\pi \frac{m}{s}}$$

Δ4. Μετά την κρούση το σύστημα των δυο σωμάτων θα εκτελέσει φθίνουσα ταλάντωση γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας (με αυτή της ταλάντωσης του m_1), με αρχικό πλάτος $A_0 = |x_1| = 0,32\ m$ (αφού το συσσωμάτωμα δεν έχει ταχύτητα αμέσως μετά την κρούση).

Η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης θα ισούται με την περίοδο της απλής αρμονικής ταλάντωσης του συστήματος των δυο σωμάτων, απουσία αποσβέσεων, δηλ:

$$T = T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \quad \text{ή} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{1+0,6}{160}} \quad \text{ή} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{100}} \quad \text{ή}$$

$$\underline{T = \frac{\pi}{5}\,s}$$

Εφόσον η δύναμη απόσβεσης λόγω αέρα είναι της μορφής F΄=-bυ, το πλάτος της ταλάντωσης θα μειώνεται εκθετικά με το χρόνο και συνεπώς:

$$A_{10} = A_0 e^{-\Lambda t} \xrightarrow{t=10T} A_{10} = \frac{A_0}{e^{\frac{\ln 2}{\pi} 10 \frac{\pi}{5}}} \quad \text{ή} \quad A_{10} = \frac{A_0}{e^{2\cdot \ln 2}} \quad \text{ή} \quad A_{10} = \frac{A_0}{e^{\ln 2^2}} \quad \text{ή}$$

$$A_{10} = \frac{A_0}{2^2} \ \text{ή}\ A_{10} = \frac{0,32}{4} \ \text{ή}\ \boxed{A_{10} = 0,08\ m}$$