# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
**Β΄ ΦΑΣΗ**

**Ε_3.Φλ3Θ(ε)**

**ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
**ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ**

**Ημερομηνία: Κυριακή 24 Απριλίου 2016**
**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

*Στις ερωτήσεις από 1-4 να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

**Α1.** Ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα. Εάν διπλασιαστεί το μέτρο της στροφορμής του, χωρίς να αλλάξει ο άξονας περιστροφής γύρω από τον οποίο αυτό περιστρέφεται, τότε η κινητική του ενέργεια:

**α.** παραμένει σταθερή
**β.** υποδιπλασιάζεται
**γ.** διπλασιάζεται
**δ.** τετραπλασιάζεται

**Μονάδες 5**

**Α2.** Σε μία διάταξη παραγωγής φθίνουσας μηχανικής ταλάντωσης η δύναμη αντίστασης είναι της μορφής $F = -b\upsilon$, όπου b η σταθερά απόσβεσης. Για μια μικρή τιμή της σταθεράς απόσβεσης το σύστημα εκτελεί N ταλαντώσεις μέχρι το πλάτος να μειωθεί στο $\frac{1}{8}$ της αρχικής του τιμής. Αν η σταθερά απόσβεσης αυξηθεί τότε το πλήθος των ταλαντώσεων μέχρι το πλάτος να μειωθεί στο $\frac{1}{8}$ της αρχικής του τιμής

**α.** αυξάνεται.
**β.** μειώνεται.
**γ.** παραμένει σταθερό.
**δ.** είναι μηδέν.

**Μονάδες 5**

**Α3.** Η εξίσωση του Bernoulli είναι συνέπεια της αρχής διατήρησης:

**α.** της ορμής στα ρευστά.
**β.** της ενέργειας στα ρευστά.
**γ.** της μάζας των ρευστών.
**δ.** του ηλεκτρικού φορτίου των ρευστών.

**Μονάδες 5**

**Α4.** Ηχητική πηγή, η οποία εκπέμπει ήχο συχνότητας $f_S$ με μήκος κύματος $\lambda_S$, κινείται με σταθερή ταχύτητα στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο ακίνητους παρατηρητές Α και Β, κατευθυνόμενη από τον Α προς τον Β. Οι παρατηρητές Α και Β αντιλαμβάνονται τον ήχο της πηγής με αντίστοιχες συχνότητες $f_A$, $f_B$ και μετρούν αντίστοιχα μήκη κύματος $\lambda_A$, $\lambda_B$. Επομένως ισχύει:

**α.** $\lambda_A = \lambda_S = \lambda_B$ και $f_A = f_S = f_B$
**β.** $\lambda_A > \lambda_S > \lambda_B$ και $f_A > f_S > f_B$
**γ.** $\lambda_A > \lambda_S > \lambda_B$ και $f_A < f_S < f_B$
**δ.** $\lambda_A < \lambda_S < \lambda_B$ και $f_A > f_S > f_B$

**Μονάδες 5**

***Α5.*** *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη **Σωστό**, για τη σωστή πρόταση, και τη λέξη **Λάθος**, για τη λανθασμένη.*

**α.** Δύο διαπασών είναι πολύ κοντά το ένα με το άλλο και παράγουν ήχους της ίδιας σταθερής έντασης με συχνότητες $f_1$, $f_2$ που διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους με $f_1 > f_2$. Ένας παρατηρητής αντιλαμβάνεται ήχο του οποίου η ένταση μεταβάλλεται περιοδικά με το χρόνο, με συχνότητα $f = f_1 - f_2$.

**β.** Δύο σφαίρες μαζών $m_1$, $m_2$ που έχουν ορμές $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ και κινητικές ενέργειες $K_1$ , $K_2$ αντίστοιχα, συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Ακριβώς πριν και αμέσως μετά την κρούση οι μεταβολές ορμής και κινητικής ενέργειας των σφαιρών συνδέονται με τις σχέσεις: $\Delta\vec{p}_1 = \Delta\vec{p}_2$ και $\Delta K_1 = \Delta K_2$

**γ.** Όταν δύο πλοία πλέουν παράλληλα και σε μικρή απόσταση μεταξύ τους αναπτύσσονται δυνάμεις που τείνουν να τα απομακρύνουν το ένα από το άλλο.

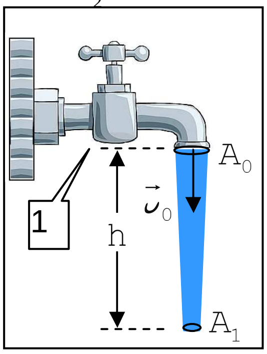
**δ.** Η μονάδα μέτρησης του σπιν στο SI είναι το $1\text{Kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$.

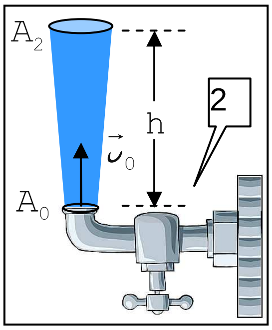
**ε.** Σε στάσιμο κύμα το οποίο δημιουργείται σε ένα σχοινί από δυο κύματα με πλάτος Α, μήκος κύματος λ, συχνότητα f το καθένα και αντίθετες κατευθύνσεις όλα τα υλικά σημεία του σχοινιού που βρίσκονται εκατέρωθεν ενός δεσμού και απέχουν μεταξύ τους αποστάσεις μικρότερες από $\frac{\lambda}{2}$ κινούνται κάθε χρονική στιγμή προς την ίδια κατεύθυνση.

**Μονάδες 5**

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Από το στόμιο μιας βρύσης εμβαδού διατομής $A_0$, εκρέει κατακόρυφα φλέβα νερού, με φορά προς τα κάτω (1) ή με φορά προς τα πάνω (2), με την ίδια αρχική ταχύτητα εκροής μέτρου $\upsilon_0$. Αν μετά από απόσταση h από το στόμιο της βρύσης, η φλέβα του νερού έχει εμβαδόν διατομής $A_1$ και $A_2$ αντίστοιχα και ισχύει η σχέση $\upsilon_0 = \sqrt{4 \cdot g \cdot h}$ τότε ο λόγος $\frac{A_1}{A_2}$ των εμβαδών διατομής ισούται με:




**α.** $\frac{A_1}{A_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

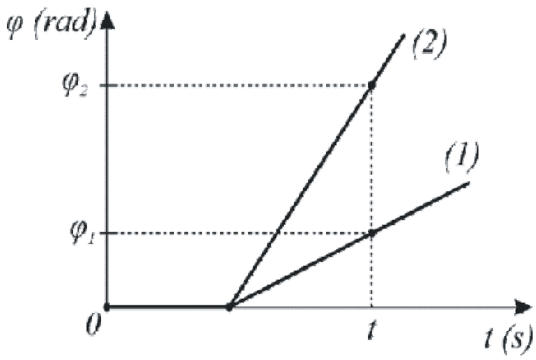
**β.** $\frac{A_1}{A_2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

**γ.** $\frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{3}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. **Μονάδες 2**

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. **Μονάδες 6**

**Β2.** Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου προς την κατεύθυνση του θετικού ημιάξονα Οx. Η γραφική παράσταση της φάσης σε συνάρτηση με το χρόνο φ = f(t), ενός υλικού σημείου Κ του μέσου, για δύο διαφορετικές τιμές της συχνότητας της πηγής του κύματος $f_1$ και $f_2$, φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για τις φάσεις του κύματος τη χρονική στιγμή t ισχύει ότι $\varphi_2 = 3\varphi_1$. Αν για τη συχνότητα $f_1$ μεταξύ του υλικού σημείου Κ και της αρχής Ο υπάρχουν ακριβώς 4 μήκη κύματος $\lambda_1$, τότε μεταξύ του ίδιου σημείου και του Ο για το δεύτερο κύμα υπάρχουν ακριβώς:




**α.** 4 μήκη κύματος $\lambda_2$

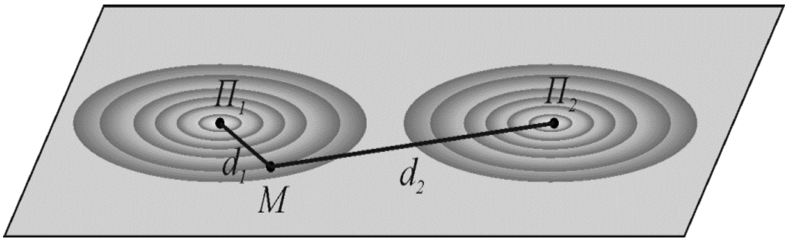
**β.** 6 μήκη κύματος $\lambda_2$

**γ.** 12 μήκη κύματος $\lambda_2$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. **Μονάδες 2**

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. **Μονάδες 6**

**Β3.** Ένας μαθητής μελετώντας το φαινόμενο της συμβολής έχει στη διάθεσή του δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων $\Pi_1$ και $\Pi_2$ που βρίσκονται σε δύο σημεία της επιφάνειας ενός υγρού και εκτελούν ταλάντωση σύμφωνα με την εξίσωση $y = 0,2\eta\mu(10\pi t)$ (SI). Τα κύματα που παράγονται είναι εγκάρσια αρμονικά του ίδιου πλάτους και της ίδιας συχνότητας και διαδίδονται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 2m/s$. Ένα σημείο Μ της επιφάνειας του υγρού απέχει αποστάσεις από τις δύο πηγές $d_1 = 0,2m$ και $d_2 = 1,2m$ αντίστοιχα.




**α.** Ο μαθητής εκτιμά ότι το σημείο Μ μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων, παραμένει συνεχώς ακίνητο.

**i.** Συμφωνείτε ή

**ii.** Διαφωνείτε

**Μονάδες 2**

Να αιτιολογήσετε την άποψή σας.

**Μονάδες 3**

**β.** Ο μαθητής πειραματιζόμενος με τη συχνότητα των δύο πηγών, διαπιστώνει ότι το σημείο Μ ταλαντώνεται με το μέγιστο πλάτος, όταν το ποσοστό επί τοις εκατό % της ελάχιστης κατ' απόλυτη τιμή μεταβολής της συχνότητας των δύο πηγών παραγωγής κυμάτων, γίνει ίση με:

**i.** 20 %

**ii.** 40 %

**iii.** 60 %

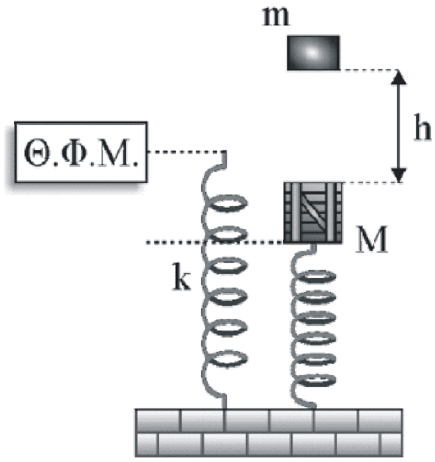
Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

**Μονάδες 4**

## ΘΕΜΑ Γ

Κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 100N/m$ έχει στερεωμένο το κάτω του άκρο στο οριζόντιο δάπεδο. Στο πάνω ελεύθερο άκρο του ελατηρίου ισορροπεί σώμα μάζας $M = 3Kg$. Στην κατακόρυφο που ταυτίζεται με τον άξονα του ελατηρίου και σε απόσταση h πάνω από το σώμα μάζας Μ αφήνεται ελεύθερο ένα σώμα μάζας $m = 1Kg$. Τα δύο σώματα συγκρούονται, χωρίς να αναπηδούν και παραμένοντας σε επαφή μεταξύ τους εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 0,4m$.

Θεωρούμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου $t = 0$ τη χρονική στιγμή της κρούσης τους και επιλέγουμε ως θετική φορά την προς τα κάτω. Να υπολογίσετε:




**Γ1.** Την κοινή ταχύτητα των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση τους και την απόσταση h των δύο σωμάτων τη στιγμή που αφέθηκε ελεύθερο το σώμα μάζας m.

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της ορμής του συστήματος και τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος όταν διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση $x = +\frac{A}{2}$.

**Μονάδες 6**

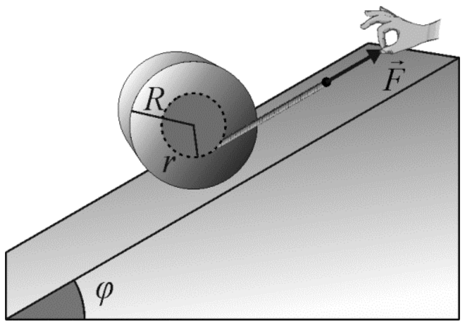
**Γ3.** Το έργο της δύναμης του ελατηρίου από τη στιγμή της επαφής των σωμάτων μέχρι τη στιγμή που φτάνουν στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής τους, καθώς και το έργο της δύναμης επαναφοράς της ταλάντωσης για την ίδια μετατόπιση.

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Το μέτρο της δύναμης επαφής που ασκείται στο σώμα μάζας m από το σώμα μάζας M στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης.

**Μονάδες 5**

Δίνεται ότι το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας είναι $g = 10m/s^2$.
Να θεωρήσετε αμελητέες τις αντιστάσεις του αέρα και τη χρονική διάρκεια της κρούσης.




## **ΘΕΜΑ Δ**

Το στερεό σώμα κυκλικής διατομής έχει εξωτερική ακτίνα $R = 0,2m$, όπως φαίνεται στο σχήμα, ενώ η μάζα του είναι $m = 4Kg$. Η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του είναι $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$. Στο σώμα υπάρχει εσωτερικό αυλάκι με ακτίνα $r = 0,1m$. Το στερεό βρίσκεται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης, $\varphi = 30^o$. Λεπτή αβαρής κλωστή είναι τυλιγμένη στο εσωτερικό αυλάκι και δεν ολισθαίνει σε όλη τη διάρκεια του φαινόμενου που ακολουθεί. Η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει μέτρο ίσο με $g = 10m/s^2$. Στην άκρη του νήματος που παραμένει συνεχώς παράλληλο με το κεκλιμένο επίπεδο ασκείται σταθερή δύναμη παράλληλη με το κεκλιμένο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα, μέσω της οποίας ελέγχουμε την κίνηση του σώματος.

**Δ1.** Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ ώστε το στερεό να ισορροπεί ακίνητο πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Αυξάνουμε το μέτρο της δύναμης F κατά 30% και το στερεό αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του στερεού σώματος και το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του σώματος.

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Τη χρονική στιγμή t, που το στερεό σώμα έχει μετατοπιστεί κατά Δx = 2m από την αρχική θέση του, να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του. Να βρείτε το μήκος του νήματος που έχει τυλιχθεί στο εσωτερικό αυλάκι από την αρχή της διαδικασίας έως τη χρονική στιγμή t.

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της στροφικής κινητικής ενέργειας του στερεού σώματος τη χρονική στιγμή t, που το σώμα έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = 2m$ από την αρχική του θέση;

**Μονάδες 5**

**ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
**ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ**

**Ημερομηνία: Κυριακή 24 Απριλίου 2016**
**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

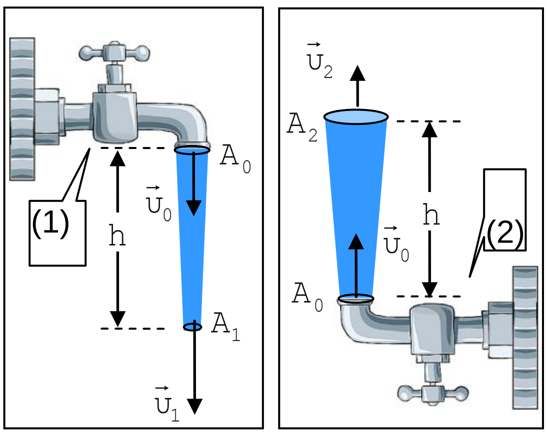
## ΘΕΜΑ Α

| ΕΡΩΤΗΣΗ | Α1 | Α2 | Α3 | Α4 |
|---|---|---|---|---|
| ΑΠΑΝΤΗΣΗ | δ | β | β | γ |

**Α5** **α.** Σ
**β.** Λ
**γ.** Λ
**δ.** Λ
**ε.** Λ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Η σωστή απάντηση είναι η **(β)**




Οι στοιχειώδης μάζες του νερού που εκτοξεύονται από το στόμιο της βρύσης αποκτούν ταχύτητες μέτρων $υ_1$ και $υ_2$ αντίστοιχα σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, γιατί κινούνται εξαιτίας του βάρους τους και μόνο η οποία είναι διατηρητική δύναμη. Θεωρούμε ότι το νερό συμπεριφέρεται σαν ιδανικό υγρό (χωρίς να υπάρχουν εσωτερικές τριβές) και φυσικά πριν η ροή του νερού γίνει τυρβώδης.

(1): $E_{μηχ(0)} = E_{μηχ(1)}$ οπότε $K_{(0)} + U_{(0)} = K_{(1)} + U_{(1)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\Delta m\cdot\upsilon_0^2 + \Delta m\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\Delta m\cdot\upsilon_1^2 \Leftrightarrow \upsilon_0^2 + 2\cdot g\cdot h = \upsilon_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot g\cdot h + 2\cdot g\cdot h = \upsilon_1^2 \Leftrightarrow \boxed{\upsilon_1 = \sqrt{6\cdot g\cdot h}}$$

(2): $E_{μηχ(0)} = E_{μηχ(2)}$ οπότε $K_{(0)} + U_{(0)} = K_{(2)} + U_{(2)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\Delta m\cdot\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\Delta m\cdot\upsilon_2^2 + \Delta m\cdot g\cdot h \Leftrightarrow \upsilon_0^2 - 2\cdot g\cdot h = \upsilon_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot g\cdot h - 2\cdot g\cdot h = \upsilon_2^2 \Leftrightarrow \boxed{\upsilon_2 = \sqrt{2\cdot g\cdot h}}$$

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε:

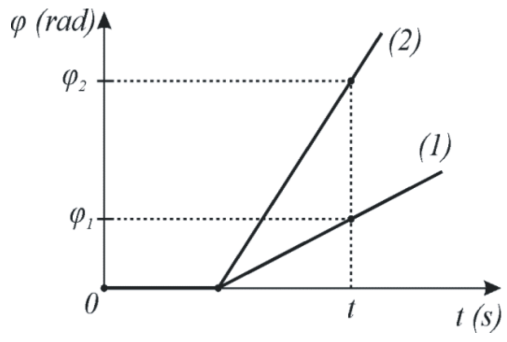
$$\Pi_1 = \Pi_2 \Leftrightarrow A_1\cdot\upsilon_1 = A_2\cdot\upsilon_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_1\cdot\sqrt{6\cdot g\cdot h} = A_2\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot h} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{\sqrt{2\cdot g\cdot h}}{\sqrt{6\cdot g\cdot h}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Οπότε: $\frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$

**Β2.** Η σωστή απάντηση είναι η **(γ)**




Ισχύει:

$$\omega_1 = \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta t} \Leftrightarrow 2\pi f_1 = \frac{\varphi_1 - 0}{\Delta t} \Leftrightarrow 2\pi f_1 = \frac{\varphi_1}{\Delta t} \ (1)$$

$$\omega_2 = \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta t} \Leftrightarrow 2\pi f_2 = \frac{\varphi_2 - 0}{\Delta t} \Leftrightarrow 2\pi f_2 = \frac{3\varphi_1}{\Delta t} \ (2)$$

Διαιρούμε τις σχέσεις (1) και (2) οπότε:

$$\frac{2\pi f_1}{2\pi f_2} = \frac{\frac{\varphi_1}{\Delta t}}{\frac{3\varphi_1}{\Delta t}} \Leftrightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{\upsilon}{\lambda_1}}{\frac{\upsilon}{\lambda_2}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \lambda_1 = 3\lambda_2$$

Οπότε $(OK) = 4\lambda_1 = 12\lambda_2$

**Β3.** **α.** Η σωστή απάντηση είναι η **(i)**

Από την εξίσωση της απομάκρυνσης $y = 0,2\eta\mu(10\pi t)$ (SI),

υπολογίζει ο μαθητής τη συχνότητα $\omega = 2\pi f$ ή $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10\pi}{2\pi} = 5Hz$.

Το μήκος κύματος είναι:

$$\upsilon = \lambda \cdot f \text{ ή } \lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{2}{5}m = 0,4m.$$

Η διαφορά δρόμου για το σημείο Μ είναι:

$$d_2 - d_1 = 1,2m - 0,2m = 1m$$

Το πλάτος της απομάκρυνσης στο σημείο Μ είναι:

$$|A'| = \left|2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{d_2 - d_1}{2\lambda}\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{1m}{2\cdot 0,4}\right| \text{ ή}$$

$$|A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{2}\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right| = 0$$

**β.** Η σωστή απάντηση είναι η **(i)**

Για να μετατρέψει ο μαθητής το σημείο σε ενισχυτική συμβολή πρέπει:

$$d_2 - d_1 = \kappa \cdot \lambda = \kappa\frac{\upsilon}{f} \text{ ή}$$

$$f = \frac{\kappa \cdot \upsilon}{d_2 - d_1} = 2\kappa \;(1)$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την ελάχιστη κατ' απόλυτη τιμή επί τοις εκατό % μεταβολή (αύξηση ή μείωση) της συχνότητας των δύο πηγών παραγωγής κυμάτων:

- Για $\kappa=1$ $(1)\Rightarrow f_1=2\cdot 1Hz=2Hz$ ενώ $\Delta f=|f-f_1|=|5-2|Hz=3Hz$
- Για $\kappa=2$ $(1)\Rightarrow f_2=2\cdot 2Hz=4Hz$ ενώ $\Delta f=|f-f_2|=|5-4|Hz=1Hz$
- Για $\kappa=3$ $(1)\Rightarrow f_3=2\cdot 3Hz=6Hz$ ενώ $\Delta f=|f-f_3|=|5-6|Hz=1Hz$

Η ελάχιστη μεταβολή είναι για τις δύο τελευταίες περιπτώσεις, όπου το ποσοστό επί τοις εκατό % μεταβολής της συχνότητας κατά απόλυτη τιμή είναι:

$$\Pi=\frac{\Delta f}{f}100\%=\frac{1Hz}{5Hz}100\%=20\%$$

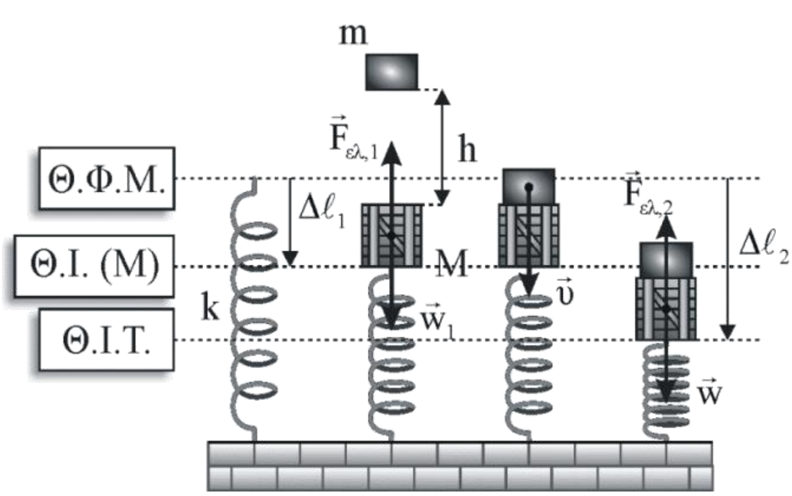
## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Αρχικά σχεδιάζουμε το κατακόρυφο ελατήριο στη κατάσταση φυσικού του μήκους. Σχεδιάζουμε στη συνέχεια το σώμα μάζας Μ στη θέση ισορροπίας του και τις δυνάμεις που του ασκούνται δηλαδή τη βαρυτική δύναμη $\vec{w}_1$, και την δύναμη $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ του παραμορφωμένου κατά $\Delta\ell_1$ ελατηρίου.

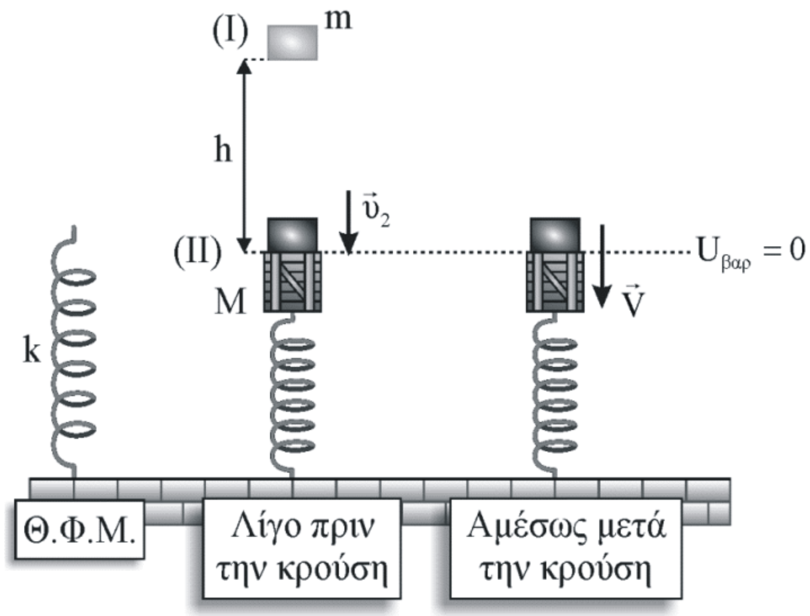
- Μελετώντας την ισορροπία του σώματος μάζας Μ εφαρμόζουμε την συνθήκη ισορροπίας για την συνισταμένη των δυνάμεων:

$$\Sigma\vec{F}=\vec{0} \text{ ή } F_{\varepsilon\lambda,1}-w_1=0 \text{ ή } F_{\varepsilon\lambda,1}=w_1 \text{ ή } k\Delta\ell_1=Mg$$

$$\text{ή } \Delta\ell_1=\frac{Mg}{k}=\frac{3\cdot 10}{100} \text{ ή } \Delta\ell_1=0{,}3m$$



- Μελετάμε την κίνηση του σώματος μάζας m από τη θέση που αφέθηκε ελεύθερο μέχρι τη θέση που συγκρούεται με το ακίνητο σώμα μάζας Μ. Κατά την κίνηση του σώματος m από τη θέση (Ι) στη θέση (ΙΙ), η μοναδική δύναμη, που δρα επάνω του (και παράγει έργο) είναι η βαρυτική δύναμη $\vec{w}_2$, η οποία είναι συντηρητική. Έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε την Α.Δ.Μ.Ε από τη θέση (Ι) στη (ΙΙ). Ορίζοντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής ενέργειας τη θέση (ΙΙ), έχουμε:




$$E_{\mu\eta\chi,I} = E_{\mu\eta\chi,II} \text{ ή } K_I + U_I = K_{II} + U_{II} \text{ ή } mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \text{ ή } h = \frac{\upsilon^2}{2g} \ (1)$$

- Μελετώντας την σύγκρουση των δύο σωμάτων εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Ορμής και έχουμε:

$$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$$

$$m\upsilon = (M+m)V \ (2)$$

- Το σύστημα των δύο σωμάτων στη συνέχεια ταλαντώνεται εκατέρωθεν της θέσης ισορροπίας στην οποία το ελατήριο είναι παραμορφωμένο κατά $\Delta\ell_2$

  Μελετώντας την ισορροπία για το σύστημα των σωμάτων εφαρμόζουμε την συνθήκη ισορροπίας για την συνισταμένη των δυνάμεων:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } F_{\varepsilon\lambda,2} - (w_1 + w_2) = 0 \text{ ή } F_{\varepsilon\lambda,2} = w_1 + w_2 \text{ ή } k\Delta\ell_2 = (M+m)g$$

$$\text{ή } \Delta\ell_2 = \frac{(M+m)g}{k} = \frac{(3+1)10}{100} \text{ ή } \Delta\ell_2 = 0{,}4\text{m}$$

Η κοινή ταχύτητα των σωμάτων τη στιγμή t = 0 που αρχίζουν ταλάντωση είναι η V και η απομάκρυνσή τους $x_1$ από την θέση ισορροπίας ταλάντωσης (ΘΙΤ) είναι:

$$x_1 = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1 = 0{,}4 - 0{,}3 \quad ή \quad x_1 = 0{,}1\text{m}$$

Εφαρμόζοντας την διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση για την θέση που αρχίζει η ταλάντωση και τη θέση μέγιστης απομάκρυνσης θα προκύψει η κοινή ταχύτητα V των σωμάτων:

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}DA^2$$

$$(3+1)V^2 + 100\cdot 0{,}1^2 = 100\cdot 0{,}4^2$$

$$4V^2 + 1 = 16 \quad ή \quad V = \frac{\sqrt{15}}{2}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Από την σχέση (2) προκύπτει η ταχύτητα του σώματος m λίγο πριν συγκρουστεί με το σώμα Μ:

$$\upsilon = \frac{(M+m)V}{m} = \frac{(3+1)\frac{\sqrt{15}}{2}}{1} \quad ή \quad \upsilon = 2\sqrt{15}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Από την σχέση (1) προκύπτει η απόσταση h από την οποία αφέθηκε ελεύθερο το σώμα m.

$$h = \frac{\left(2\sqrt{15}\right)^2}{2\cdot 10} \quad ή \quad h = 3\text{ m}$$

**Γ2.** **α)** Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι:

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dx_2 \xrightarrow{x_2 = \frac{A}{2}} \frac{dp}{dt} = -D\frac{A}{2} \quad ή \quad \frac{dp}{dt} = -100\frac{0{,}4}{2} \quad ή \quad \frac{dp}{dt} = -20\frac{\text{Kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}$$

**β)** Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F\cdot dx}{dt} = \Sigma F\cdot\upsilon_2 = -D\,x\cdot\upsilon_2 \quad (3)$$

Εφαρμόζοντας την διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση για τη θέση $x_2 = +A/2$ και τη θέση μέγιστης απομάκρυνσης θα προκύψει η ταχύτητα $\upsilon_2$ των σωμάτων:

$$\frac{1}{2}(M+m)\,\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}D\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}DA^2$$

$$(3+1)\upsilon_2^2 + 100\cdot 0{,}2^2 = 100\cdot 0{,}4^2$$

$$4\upsilon_2^2 + 4 = 16 \quad \acute{\eta} \quad \upsilon_2 = \pm\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$$

Επειδή η θετική κατεύθυνση είναι προς τα κάτω. Όταν το σύστημα περνάει από τη θέση $x_2 = +A/2$ για πρώτη φορά θα είναι: $\upsilon_2 = +\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$

Από τη σχέση (3) προκύπτει:

$$\frac{dK}{dt} = -D\,x_2 \cdot \upsilon_2 = -\,100 \cdot 0{,}2\left(+\sqrt{3}\right) \quad \acute{\eta} \quad \frac{dK}{dt} = -\,20\sqrt{3}\,\frac{J}{s}$$

**Γ3.** **α)** Το έργο της δύναμης του ελατηρίου μεταξύ δύο θέσεων υπολογίζεται επειδή είναι συντηρητική δύναμη ως εξής:

$$W_{F\varepsilon\lambda} = -\Delta U_{\varepsilon\lambda} = U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau(\alpha\rho\chi)} - U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau(\tau\varepsilon\lambda)} \quad (4)$$

Η επάνω ακραία θέση της ταλάντωσης συμπίπτει με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Συνεπώς η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου σε αυτή τη θέση είναι ίση με μηδέν. Η θέση όπου τα σώματα έρχονται σε επαφή είναι η θέση στην οποία το ελατήριο είναι παραμορφωμένο κατά $\Delta\ell_1$. Από τη σχέση (4) προκύπτει:

$$W_{F\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k\Delta\ell_1^2 \quad \acute{\eta} \quad W_{F\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}100 \cdot 0{,}3^2 \quad \acute{\eta} \quad W_{F\varepsilon\lambda} = 4{,}5\ J$$

**β)** Το έργο της δύναμης επαναφοράς μεταξύ δύο θέσεων, υπολογίζεται επειδή είναι συντηρητική δύναμη, ως εξής: $W_{F\varepsilon\pi} = -\Delta U_{\tau\alpha\lambda}$ ή

$$W_{F\varepsilon\pi} = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda} \quad \acute{\eta} \quad W_{F\varepsilon\pi} = \frac{1}{2}Dx_1^2 - \frac{1}{2}DA^2 \quad \acute{\eta} \quad W_{F\varepsilon\pi} = \frac{1}{2}100 \cdot 0{,}1^2 - \frac{1}{2}100 \cdot 0{,}4^2$$

$$W_{F\varepsilon\pi} = 0{,}5 - 8 \quad \acute{\eta} \quad W_{F\varepsilon\pi} = -7{,}5J$$

***2ος τρόπος***

Με εφαρμογή του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας μεταξύ της θέσης όπου τα σώματα έρχονται σε επαφή και της πάνω ακραίας θέσης έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F_{\varepsilon\pi}} \quad \acute{\eta} \quad W_{F_{\varepsilon\pi}} = 0 - \frac{1}{2}(M+m)\upsilon^2 \quad \acute{\eta} \quad W_{F_{\varepsilon\pi}} = -\frac{1}{2}(3+1)\sqrt{3}^2 \quad \acute{\eta} \quad W_{F_{\varepsilon\pi}} = -7{,}5J$$

**Γ4.** Κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης των σωμάτων οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα μάζας m είναι η βαρυτική δύναμη $w_2$ και η δύναμη επαφής N από το σώμα μάζας M.

- Η κυκλική συχνότητα ω της ταλάντωσης των σωμάτων είναι:

$$\omega=\sqrt{\frac{D}{M+m}}\xrightarrow{D=k}\omega=\sqrt{\frac{100}{3+1}}\ \text{ή}\ \omega=\sqrt{25}\ \text{ή}\ \omega=5\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

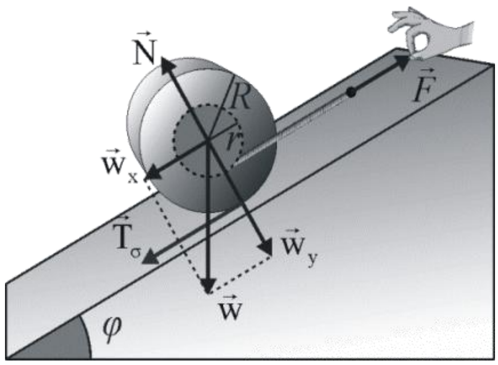
- Καθώς το σώμα m ταλαντώνεται ισχύει:

$$\Sigma F=-D_m x\ \text{ή}\ mg-N=-m\omega^2 x\ \text{ή}\ N=mg+m\omega^2 x$$

$$\text{ή}\ N=1\cdot 10+1\cdot 5^2 x\ \text{ή}\ N=10+25\,x\xrightarrow{x=-A=-0{,}4}N=10+25\,(-0{,}4)\ \text{ή}\ N=0$$

Δηλαδή στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης η επαφή των δύο σωμάτων είναι οριακή.

## ΘΕΜΑ Δ




**Δ1.** Στο σώμα ενεργούν το βάρος w, η στατική τριβή $T_\sigma$ και η αντίδραση N του κεκλιμένου επιπέδου. Θεωρούμε άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος. Αναλύουμε το βάρος σε δύο συνιστώσες όπως στο σχήμα και έχουμε:

$w_y=mg\sigma\upsilon\nu\varphi$ και $w_x=mg\eta\mu\varphi$ (1).

Από την συνθήκη ισορροπίας του σώματος προκύπτει ότι:

$$\Sigma\tau=0\ \text{ή}\ T_\sigma\cdot R-F\cdot r=0\ \text{ή}\ F\cdot r=T_\sigma\cdot 2r\ \text{ή}\ F=2T_\sigma\ (2)$$

$$\Sigma F_y=0\ \text{ή}\ N-w_y=0\ \text{ή}\ N=mg\sigma\upsilon\nu\varphi(3)$$

$$\Sigma F_x=0\ \text{ή}\ F-w_x-T=0\ \text{ή}\ 2T-mg\eta\mu\varphi-T_\sigma=0\ \text{ή}\ T_\sigma=mg\eta\mu\varphi\ \text{ή}\ T_\sigma=20\text{N}$$

Άρα λόγω της (2) **F= 40N.**

**Δ2.** Αυξάνοντας το μέτρο της δύναμης F κατά 30% θα γίνει:

$$F=\frac{130}{100}40\text{N}=52\text{N}$$

Το σώμα θα αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει επιταχυνόμενο προς τα επάνω με μεταφορική επιτάχυνση $\alpha_{cm}$ και γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma} = \dfrac{\alpha_{cm}}{R}$.

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την μεταφορική και την περιστροφική κίνηση θα έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_x = m\vec{\alpha}_{cm} \text{ ή } F - mg\eta\mu\varphi - T_{\sigma} = m\alpha_{cm} \, (4)$$

$$\Sigma\tau = I\,\alpha \text{ ή } -Fr + T_{\sigma}R = \frac{1}{2}mR^2 \text{ ή }$$

$$T_{\sigma}R - F\frac{1}{2}R = \frac{1}{2}mR\alpha_{cm} \text{ ή } T_{\sigma} - \frac{1}{2}F = \frac{1}{2}m\alpha_{cm} \, (5)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (4) και (5) προκύπτει:

$$\frac{1}{2}F - mg\eta\mu\varphi = m\alpha_{cm} \text{ ή } 26 - 20 = 4\,\alpha_{cm} \text{ ή } \alpha_{cm} = 1\,m/s^2$$

Και η στατική τριβή θα είναι : $T_{\sigma} = \dfrac{1}{2}F + \dfrac{1}{2}m\alpha_{cm}$ ή $T_{\sigma} = 28N$

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής θα είναι (Β΄ νόμος Newton)

$$\Sigma\tau = \frac{dL}{dt} \text{ ή } \frac{dL}{dt} = T_{\sigma}\cdot R - F\cdot r = 0{,}4\ kg\cdot m^2/s^2$$

$$\frac{dL}{dt} = 0{,}4\ kg\cdot m^2/s^2$$

**Δ3.** Αξιοποιώντας την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων, εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ αποκλειστικά για την μεταφορική κίνηση του σώματος και έχουμε:

$$\Delta K = W_{o\lambda} \text{ ή } \Delta K = \Sigma F\cdot\Delta x \text{ ή }$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - 0 = m\alpha_{cm}\cdot\Delta x \text{ ή } \upsilon = \sqrt{2m\alpha_{cm}\cdot\Delta x} = \mathbf{2\,m/s}$$

Επειδή δεν υπάρχει ολίσθηση :

$$\Delta x = \Delta\theta\cdot R \text{ ή } \Delta x = \frac{\Delta s}{r}\cdot R \text{ ή }$$

$$\Delta x = 2\cdot\Delta s \text{ ή } \Delta s = 1m$$

Άρα το νήμα θα τυλιχτεί κατά **1m**

**Δ4.** Από το ΘΜΚΕ για την στροφική κίνηση

$$dK_{στρ} = W_{στρ} \text{ ή } dK_{στρ} = Στ \cdot dθ \text{ ή}$$

$$\frac{dK_{στρ}}{dt} = \left(T_σ \cdot R - F \cdot r\right) \cdot \frac{dθ}{dt} \text{ ή}$$

$$\frac{dK_{στρ}}{dt} = \left(T_σ \cdot R - F \cdot r\right) \cdot ω \text{ ή}$$

$$\frac{dK_{στρ}}{dt} = \left(T_σ \cdot R - F \cdot r\right) \cdot \frac{υ}{R} \text{ ή}$$

$$\frac{dK_{στρ}}{dt} = 4\frac{J}{s}$$