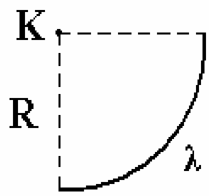
Β΄ Λυκείου

15 Μαρτίου 2003

Θεωρητικό Μέρος

Θέμα 1ο

Α. Δίνεται ένα ομοιόμορφα φορτισμένο λεπτό τεταρτημόριο δαχτυλιδιού ακτίνας R, με φορτίο λ ανά μονάδα μήκους. Να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό στο κέντρο K. (Θεωρούμε ότι το δυναμικό στο άπειρο είναι μηδέν). Δίνονται τα λ, R, K_c.



Συνοπτική απάντηση / λύση:

Θεωρούμε ένα μικρό κομμάτι του φορτισμένου τεταρτημορίου, το οποίο θα έχει φορτίο Δq και μήκος Δl. Το δυναμικό που δημιουργείται στο σημείο K από το μέρος αυτό θα είναι

$$\Delta V = \frac{K\Delta q}{R}$$

Για να βρούμε το συνολικό δυναμικό στο σημείο K αθροίζουμε όλες τις συνεισφορές από τα στοιχειώδη αυτά τμήματα φορτίου Δq , Τα τμήματα αυτά απέχουν R από το K. Τότε:

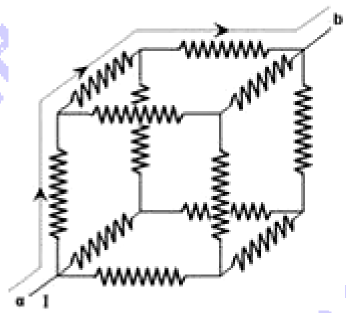
$$V = \sum \frac{K\Delta q}{R} = \frac{KQ_{ολ}}{R}$$

Όμως

$$\lambda = \frac{Q_{ολ}}{\frac{2\pi R}{4}} \Rightarrow Q_{ολ} = \frac{\pi\lambda R}{2}, \text{ άρα } V = \frac{K\pi\lambda R}{2R} \Rightarrow V = \frac{K\pi\lambda}{2}$$

Β. Κατά μήκος κάθε ακμής ενός κύβου υπάρχει από ένας αντιστάτης αντίστασης R και οι κόμβοι συμπίπτουν με τις κορυφές του κύβου. Βρείτε την ισοδύναμη αντίσταση στα άκρα μιας διαγωνίου του κύβου, π.χ. μεταξύ των σημείων a και b, ως συνάρτηση της R.

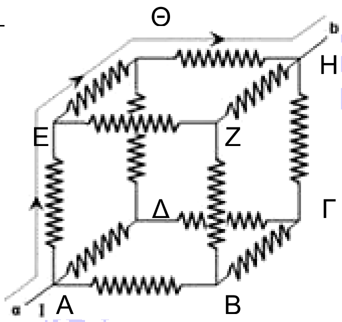
(Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε την υποδεικνυόμενη διαδρομή)



Συνοπτική απάντηση / λύση:

Ονομάζουμε τις κορυφές της κάτω βάσης του τετραγώνου με τα διαδοχικά κεφ. γράμματα Α, Β, Γ, Δ (με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού). Όμοια τις κορυφές της πάνω (απέναντι της κάτω βάσης) πλευράς με τα διαδοχικά κεφ. γράμματα Ε, Ζ, Η, Θ (και εδώ με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού).

Αν εφαρμόσουμε τον 1ο κανόνα του Kirchoff στους κόμβους του κυκλώματος θα έχουμε: στο σημείο Α ''εισέρχεται'' ρεύμα έντασης *i*. Επειδή όλες οι αντιστάσεις είναι ίσες με R λόγω συμμετρίας του κυκλώματος, το ρεύμα χωρίζεται σε *i*/3, *i*/3, *i*/3 και διαρρέει τους κλάδους ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ.



Το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο ΑΕ, φτάνει στον κόμβο Ε και χωρίζεται (για τον ίδιο λόγο με πριν: ισότητα αντιστάσεων) σε $(i/3)/2 = i/6$ που διαρρέει τον κλάδο ΕΖ και $(i/3)/2=i/6$ που διαρρέει τον κλάδο ΕΘ που μας ενδιαφέρει.

Στον κόμβο Θ φτάνει το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο ΕΘ και είναι ίσο με $i/6$ και το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο ΔΘ (επίσης ίσο με i/6) τα οποία και προστίθενται .

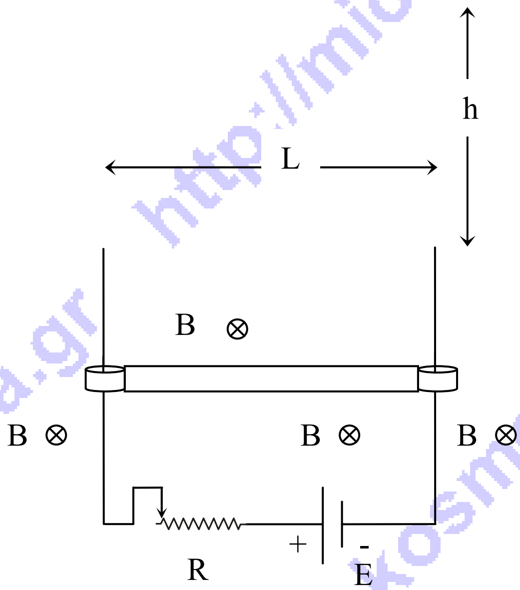
Τέλος στον κόμβο Η φτάνουν τρία ρεύματα (που διαρρέουν τους κλάδους ΘΗ, ΖΗ, ΓΗ) έντασης $i/3$ το καθένα. Επομένως από το σημείο Η ‘‘εξέρχεται’’ ρεύμα συνολικής έντασης ίση με i.

Επομένως $V_A - V_H = (i/3)\cdot R + (i/6)\cdot R + (i/3)\cdot R = 5/6\, i\cdot R$ (1)

Επίσης ισχύει: $V_A - V_H = i\cdot R_{ολ}$ (2)

Άρα από 1 και 2 προκύπτει εύκολα ότι: $R_{ολ} = 5/6\, R$

Γ. Μια μεταλλική ράβδος μάζας m=0,5 kg και μήκους L=1 m μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές κατακόρυφα προς τα πάνω ή προς τα κάτω, παραμένοντας οριζόντια και σε επαφή με δύο κατακόρυφους αγωγούς. Οι αγωγοί είναι συνδεδεμένοι στο κάτω μέρος με αντιστάτη μεταβλητής αντίστασης R και μια μπαταρία με ΗΕΔ E=10 V. Η αντίσταση της ράβδου και των αγωγών είναι αμελητέα. Ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\boldsymbol{B}$ είναι κάθετο στο επίπεδο του σχηματιζόμενου κυκλώματος, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αρχικά η ράβδος ισορροπεί ακίνητη.



Μειώνουμε την αντίσταση στη μισή από την αρχική της τιμή, μετακινώντας το δρομέα στο μέσο της, οπότε η ράβδος κινείται προς τα πάνω και πολύ γρήγορα αποκτά οριακή ταχύτητα. Η ράβδος, φτάνοντας στο τέλος των κατακόρυφων αγωγών, εκτοξεύεται και φθάνει σε ύψος h=1,25 m από το πάνω άκρο τους. Η αντίσταση από τον αέρα είναι αμελητέα. Δίνεται: g=10 m/s^2.

Να βρείτε:

Α) την ένταση του μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B}$.

Β) την τιμή της αντίστασης του αντιστάτη R.

Γ) την επιτάχυνση της ράβδου τις χρονικές στιγμές, κατά την ανοδική της κίνηση, που το μέτρο της ταχύτητας της είναι $υ$=1 m/s.

Συνοπτικές απαντήσεις / λύσεις:

α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για τη ράβδο, από τη στιγμή που εγκαταλείπει τους κατακόρυφους αγωγούς έως τη στιγμή που φθάνει στο μέγιστο ύψος της: $Mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2$, οπότε: $\upsilon_0 = \sqrt{2gh}$ και $\upsilon_0 = 5$ m/s.

Η ταχύτητα που έχει η ράβδος τη στιγμή που εγκαταλείπει τους κατακόρυφους αγωγούς, θα είναι ίση με την οριακή ταχύτητα που απέκτησε όσο ήταν σε επαφή με αυτούς.

Πριν μειώσουμε την αντίσταση η ράβδος ισορροπούσε η συνθήκη ισορροπίας θα είναι: $\Sigma \boldsymbol{F}=0 \Rightarrow BiL = mg$, σχέση που ισχύει και όταν η ράβδος αποκτά την οριακή της ταχύτητα.

Δηλαδή στην αρχική ισορροπία πριν τη μείωση της αντίστασης και στη νέα ισορροπία όπου η ράβδος αποκτά την οριακή της ταχύτητα, η ένταση του ρεύματος θα είναι ή ίδια.

Στην αρχική ισορροπία και προτού μειώσουμε την αντίσταση, το ρεύμα είναι: $i = \frac{E}{R}$ (1)

Τη στιγμή που αποκτά την οριακή ταχύτητα θα έχει αναπτυχθεί ΗΕΔ από επαγωγή στη ράβδο, με πολικότητα αντίθετη από εκείνη της μπαταρίας, ενώ η αντίσταση θα είναι $R/2$. Έτσι, η ένταση του ρεύματος θα είναι: $i = \frac{E - B\upsilon_0 L}{\frac{R}{2}}$, δηλαδή: $i = \frac{2E - 2B\upsilon_0 L}{R}$ (2)

Τα πρώτα μέλη των (1) και (2) είναι ίσα οπότε: $\frac{E}{R} = \frac{2E - 2B\upsilon_0 L}{R} \Rightarrow 2B\upsilon_0 L = E$,

οπότε: $B = \frac{E}{2\upsilon_0 L}$. Αντικαθιστώντας, έχουμε: $B = 1$ T.

β) Επειδή όμως στην αρχική ισορροπία: $BiL = mg$ και $i = \frac{E}{R}$, έχουμε: $\frac{BEL}{R} = mg$, από την οποία: $R = \frac{BEL}{mg}$. Αντικαθιστώντας έχουμε: $R = 2\ \Omega$.

γ) Αφού η οριακή ταχύτητα της ράβδου είναι $\upsilon_0 = 5$ m/s, όταν η ταχύτητα είναι $\upsilon = 1$ m/s, πριν την απόκτηση της οριακής ταχύτητας το ρεύμα θα είναι:

$i = \frac{E - B\upsilon L}{\frac{R}{2}}$ και αντικαθιστώντας βρίσκουμε: $i = 19$ A

Η επιτάχυνση από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα θα είναι:

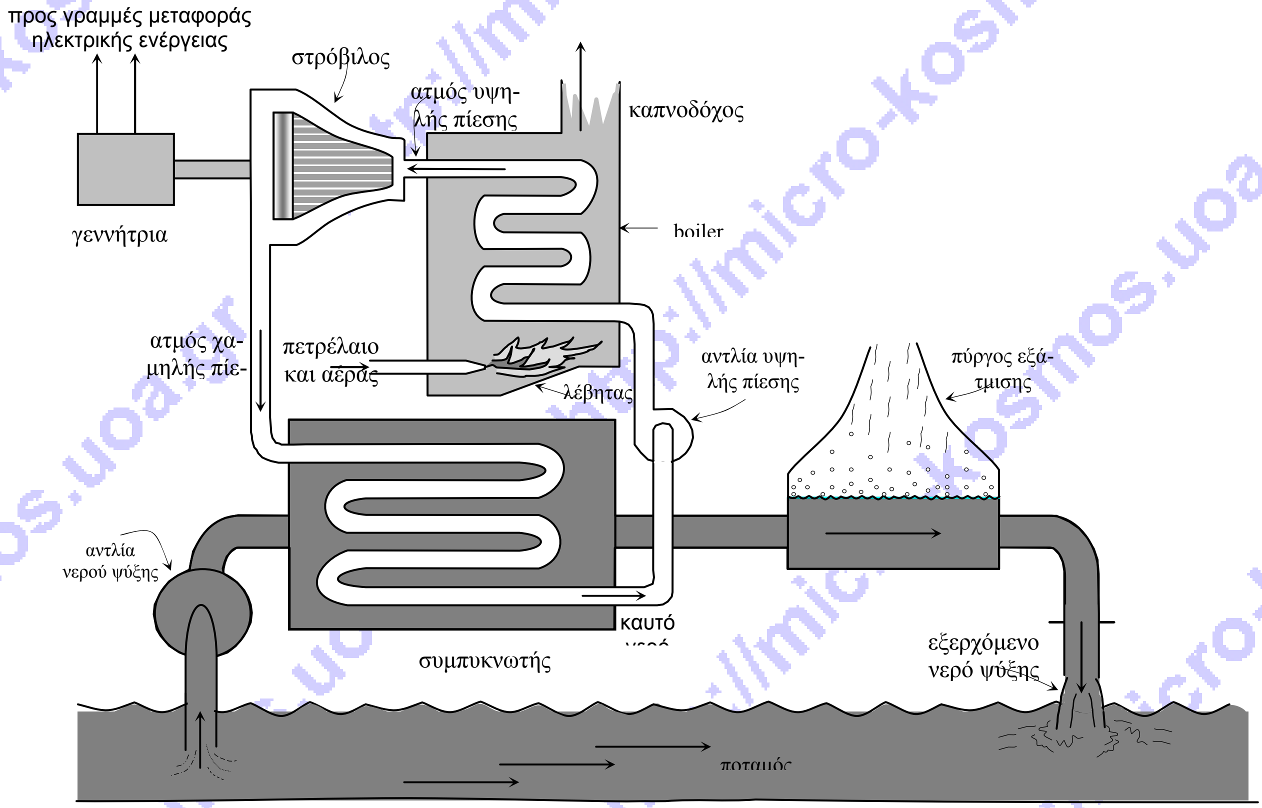
$$\alpha = \frac{F_L - mg}{m} = \frac{BIL - mg}{m} = \frac{19 - 5}{0{,}5}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 28\ \mathrm{m/s^2},$$ με φορά προς τα πάνω.

Επίσης, μετά την εκτόξευση, την στιγμή που η ταχύτητα της ράβδου είναι πάλι 1 m/s, η επιτάχυνση της θα είναι g=10 m/s^2 με φορά προς τα κάτω επειδή η μόνη δύναμη που ενεργεί στη ράβδο είναι το βάρος.

Θέμα 2^o

Ενεργειακή κρίση και θερμική ρύπανση

Ο ατμοηλεκτρικός σταθμός παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας του παρακάτω σχήματος έχει ισχύ P=1250 MW, χρησιμοποιεί ως καύσιμο, πετρέλαιο και προμηθεύεται νερό ψύξης από ένα διπλανό ποτάμι. Η παροχή του ποταμού είναι 1800 m^3/s, ενώ η ηλεκτρογεννήτρια έχει συντελεστή απόδοσης 95%.



Ο ατμός εισέρχεται στο στρόβιλο (τουρμπίνα) σε θερμοκρασία 527^0 C και εξέρχεται σε θερμοκρασία 207 ^{0}C. Το χρησιμοποιούμενο ρευστό είναι ο ατμός και η κυκλική μεταβολή που εκτελεί έχει συντελεστή απόδοσης ο οποίος με καλή προσέγγιση είναι ίσος με εκείνον του κύκλου Carnot. Το boiler μεταβιβάζει στην τουρμπίνα το 80% της παρεχόμενης θερμότητας από την καύση του πετρελαίου.
Η θερμότητα καύσης ανά μονάδα μάζας του πετρελαίου είναι $4{,}40 \cdot 10^7$ J/kg.

α) Να υπολογιστεί η μηχανική ισχύς εξόδου του στροβίλου προς τη γεννήτρια.

β) Να βρεθεί ο ρυθμός της εισερχόμενης και ο ρυθμός της εξερχόμενης (μη μετατρέψιμης σε ωφέλιμη μηχανική ενέργεια) θερμότητας από τον στρόβιλο.

γ) Πόσα βαρέλια πετρελαίου πρέπει να καίγονται ανά ώρα για να λειτουργεί ο σταθμός κανονικά;

Δίνεται η πυκνότητα του πετρελαίου 920 kg/m^3 και ο όγκος κάθε βαρελιού 0,159 m^3.

δ) Αν η μισή από την παρεχόμενη θερμότητα στο νερό ψύξης μεταφέρεται στον αέρα μέσω του πύργου εξάτμισης, ποια θα είναι η αύξηση της θερμοκρασίας του νερού του ποταμού, σε μικρή απόσταση από το σημείο εξόδου του νερού ψύξης και όταν αυτό αναμιχθεί πλήρως με το νερό του ποταμού;

Δίνεται η πυκνότητα $\rho=10^3$ kg/m^3, και η ειδική θερμότητα του νερού $c = 4200$ J/kg·grad

Συνοπτικές απαντήσεις / λύσεις:

α) $\alpha_{ΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ}=\dfrac{P_{ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ}}{P_{ΜΗΧΑΝΙΚΗ}} \Rightarrow P_{ΜΗΧΑΝΙΚΗ}=\dfrac{P_{ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ}}{\alpha_{ΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ}} \Rightarrow P_{ΜΗΧΑΝΙΚΗ}=\dfrac{1250}{0{,}95}\text{ MW} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_{ΜΗΧΑΝΙΚΗ}=1316\text{ MW}$

β) Επειδή λειτουργεί ως μηχανή Carnot ο συντελεστής απόδοσης της τουρμπίνας θα είναι: $\alpha=1-\dfrac{T_C}{T_h}$ δηλαδή $\alpha=1-\dfrac{207+273}{527+273}$ Οπότε : $\alpha_{ΤΟΥΡΜΠΙΝΑΣ}=40\%$.

Όμως: $\alpha_{ΤΟΥΡΜΠΙΝΑΣ}=\dfrac{P_{ΜΗΧΑΝΙΚΗ}}{P_{ΕΙΣΟΔΟΥ\ ΤΟΥΡΜΠΙΝΑΣ}} \Rightarrow P_{ΕΙΣΟΔΟΥ\ ΤΟΥΡΜΠΙΝΑΣ}=\dfrac{P_{ΜΗΧΑΝΙΚΗ}}{\alpha_{ΤΟΥΡΜΠΙΝΑΣ}} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_{ΕΙΣΟΔΟΥ\ ΤΟΥΡΜΠΙΝΑΣ}=\dfrac{1316}{\frac{40}{100}} \Rightarrow P_{ΕΙΣΟΔΟΥ\ ΤΟΥΡΜΠΙΝΑΣ}=3290\text{ MW}$

$P_{ΕΞΟΔΟΥ\ ΤΟΥΡΜΠΙΝΑΣ}=P_{ΕΙΣΟΔΟΥ\ ΤΟΥΡΜΠΙΝΑΣ}-P_{ΜΗΧΑΝΙΚΗ} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_{ΕΞΟΔΟΥ\ ΤΟΥΡΜΠΙΝΑΣ}=(3290-1316)\text{ MW} \Rightarrow P_{ΕΞΟΔΟΥ\ ΤΟΥΡΜΠΙΝΑΣ}=(1974)\text{ MW}$

γ) $\alpha_{BOILER}=\dfrac{P_{ΕΙΣΟΔΟΥ\ ΤΟΥΡΜΠΙΝΑΣ}}{P_{ΕΙΣΟΔΟΥ\ BOILER}} \Rightarrow P_{ΕΙΣΟΔΟΥ\ BOILER}=\dfrac{P_{ΕΙΣΟΔΟΥ\ ΤΟΥΡΜΠΙΝΑΣ}}{\alpha_{BOILER}} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_{ΕΙΣΟΔΟΥ\ BOILER}=\dfrac{3290}{\frac{80}{100}}\text{ MW}$

Αλλά: $P_{ΕΙΣΟΔΟΥ\ BOILER}=\dfrac{E}{t}$, όπου E η ενέργεια που παρέχεται από το καύσιμο σε χρόνο μίας ώρας. $E=P_{ΕΙΣΟΔΟΥ\ BOILER}\cdot t \Rightarrow E=4112{,}5\cdot 10^6\cdot 3600\text{ (J)} \Rightarrow E=14{,}805\cdot 10^{12}\text{ (J)}$

Η μάζα του πετρελαίου που θα καεί σε μια ώρα θα είναι: $m=\dfrac{E}{4{,}40\times 10^7}$ kg,

δηλαδή: m=336477 kg.

Η πυκνότητα του πετρελαίου είναι: $\rho=\dfrac{m}{V}$, άρα ο όγκος: $V=\dfrac{m}{\rho} \Rightarrow V=\dfrac{336477}{920}\text{ m}^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow V=365{,}7\text{ m}^3$

Ο αριθμός των βαρελιών είναι: $N=\dfrac{V}{V_{βαρ}} \Rightarrow N=\dfrac{365{,}7\ \text{m}^3}{0{,}159\ \frac{\text{m}^3}{\text{βαρέλι}}} \Rightarrow N=2300$ βαρέλια

δ) Στο νερό ψύξης διοχετεύεται η θερμότητα που αποβάλλεται από την τουρμπίνα. Ο ρυθμός της είναι η ισχύς εξόδου της τουρμπίνας: $P_{ΕΞΟΔΟΥ\ ΤΟΥΡΜΠΙΝΑΣ}=1974$ MW.

Η θερμότητα αυτή ανεβάζει τη θερμοκρασία του νερού ψύξης και αυτό με τη σειρά του θερμαίνει το νερό του ποταμού. Επειδή όμως η μισή από την παρεχόμενη θερμότητα αποβάλλεται στον πύργο εξάτμισης ο ρυθμός της παρεχόμενης θερμότητας στο νερό του ποταμού θα είναι: $P_N = \frac{P_{ΕΞΟΔΟΥ\ \ ΤΟΥΡΜΠΙΝΑΣ}}{2}$ => $P_N = \frac{1974}{2}$ (MW) => P_N=987 (MW)

Από το νόμο της θερμιδομετρίας: $Q=mc\Delta\theta$ ή $Q=\rho Vc\Delta\theta$, από την οποία έχουμε: $P_N=\rho c\Pi\Delta\theta$, όπου Π η παροχή του ποταμού. Οπότε: $\Delta\theta=\frac{P}{\rho c\Pi}$ =>

$\Delta\theta=\frac{987\times10^6}{10^3\times1800\times4{,}2\times10^3}$ grad => $\Delta\theta$=0,13 grad

Θέμα 3° <u>Φυσική στην ατμόσφαιρα</u>

Στην ατμόσφαιρα και σε αρκετή απόσταση από το έδαφος παρατηρούνται, λόγω ελάττωσης της πίεσης, ταχείες μετακινήσεις αερίων μαζών. Επειδή η θέρμανση ή η ψύξη αυτών των αερίων μαζών με ακτινοβολία ή με μοριακή αγωγιμότητα είναι αρκετά βραδεία, μπορούν οι παραπάνω μεταβολές των αερίων μαζών να θεωρηθούν αδιαβατικές. Θεωρούμε ότι μια ξηρή αέρια μάζα αρχικής θερμοκρασίας T_1 και πίεσης p_1 μετακινείται ταχέως, ώστε η θερμοκρασία της και η πίεσή της να πάρουν τις τιμές T_2 και p_2 αντίστοιχα.

Α. Αν η πίεση της αέριας μάζας κατά την παραπάνω μετακίνηση μειώθηκε κατά 27,1% δείξτε ότι η θερμοκρασία της μειώθηκε κατά 10%. Θεωρείστε για τον ατμοσφαιρικό αέρα γ=1,5.

Β. Αν είναι p_1= 10^5 N/m^2 και T_1= 300 K να βρεθεί η πίεση p_2 σε N/m^2 και η αρχική και τελική θερμοκρασία της αέριας μάζας σε ^oC.

Γ. (Ι) Να βρεθεί η (μηχανική) ενέργεια ανά mol αερίου που μεταφέρθηκε από την αέρια μάζα στην περιβάλλουσα ατμόσφαιρα. Η μεταβολή θεωρείται αντιστρεπτή .

(ΙΙ) Να βρεθεί ο λόγος $\upsilon_{1,εν}/\upsilon_{2,εν}$ των ενεργών ταχυτήτων των μορίων της αέριας μάζας, στην αρχική και στην τελική θέση.

Δ. Θεωρούμε για λόγους απλότητας την ατμόσφαιρα ομογενή με πυκνότητα ρ=1,2 Kg/m^3 και ότι η μεταβολή της πίεσης της ατμόσφαιρας με το ύψος δίνεται από την εξίσωση της υδροστατικής:

$$\Delta p = - \rho\, g\, \Delta h$$

(Ι) Ποια η κατακόρυφη απόσταση δύο σημείων όπου η πίεση είναι p_1 και p_2 αντίστοιχα, όπως αυτές προσδιορίστηκαν στο Β ερώτημα.

(ΙΙ) Στη γλώσσα της μετεωρολογίας κατακόρυφη θερμοβαθμίδα ονομάζεται η μεταβολή της θερμοκρασίας για κατακόρυφη μετατόπιση Δh =-100 m. Να βρείτε την κατακόρυφη θερμοβαθμίδα στην περίπτωση της ομογενούς ατμόσφαιρας, (αν ο αέρας θεωρηθεί ιδανικό αέριο με γραμμομοριακή μάζα M = 29×10^{-3} Kg/mol).

(III) Θεωρώντας την ατμόσφαιρα ομογενή υπολογίστε το πάχος της, αν στην επιφάνεια του εδάφους η πίεση είναι 10^5N/m^2

Δίνονται: Η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m/s^2 , R = 8,3 J/mol·K και 9^3 =729.

Συνοπτικές απαντήσεις / λύσεις:

Α. Από το νόμο του Poisson για την αδιαβατική μεταβολή $p_1V_1^{\gamma}= p_2V_2^{\gamma}$ και την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων έχουμε:

$$T_1 p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \text{ ή } \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (1)$$

όμως η p_2 είναι το (100-27,1)% = 72,9 % της p_1 άρα: p_1/p_2 = 1000/729 = $10^3/9^3$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει T_1/T_2=10/9 ή $T_2 = \frac{9}{10}T_1$ (3)

άρα η μείωση της θερμοκρασίας της αέριας μάζας είναι το 1/10 ή 10% της T_1

Β. Από τη (2) έχουμε : $p_2 = \frac{729}{1000}10^5 \,{}^{\text{N}}\!/_{\text{m}^2} = 72.900\,{}^{\text{N}}\!/_{\text{m}^2}$

Επίσης η (3) για T_1 = 300 K δίνει T_2 = 270 K, άρα προκύπτουν εύκολα σε βαθμούς Κελσίου η αρχική και τελική θερμοκρασία 27^o C και -3^o C αντίστοιχα.

Γ. (I) Από τις σχέσεις $\gamma = C_p/C_v$ και $C_p = C_v + R$ προκύπτει: $C_v = R/\gamma$-1 = 16,6 J/mol K

Τέλος έχουμε: $W = -\Delta U = -nC_v\Delta T$ ή W/n =-16,6(-30) J/mol = 498 J/mol

(II) Είναι: $$\frac{\upsilon_{1,\varepsilon\nu}}{\upsilon_{2,\varepsilon\nu}} = \frac{\sqrt{\frac{3RT_1}{M}}}{\sqrt{\frac{3RT_2}{M}}} = \sqrt{\frac{300}{270}} = \frac{\sqrt{10}}{3} = 1{,}054$$

Δ. (I) Έχουμε: $\Delta h = \frac{\Delta p}{-\rho g} = \frac{p_2 - p_1}{-\rho g}$ η οποία με αντικατάσταση τιμών δίνει Δh = 2258 m.

Δηλαδή η θέση όπου η πίεση είναι p_2 βρίσκεται κατά 2258 m ψηλότερα από τη θέση όπου η πίεση είναι p_1.

(II) Η καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων λόγω των σχέσεων $n= m/M$ και $\rho =m/V$, γίνεται $pM=\rho RT$, άρα: $\Delta p = \frac{\rho R}{M}\Delta T$ ή $-\rho g \Delta h = \frac{\rho R}{M}\Delta T$ ή $\Delta T = -\frac{gM}{R}\Delta h$

για Δh = -100 m παίρνουμε ΔT = 3,49K

(III) Από τη σχέση: $\Delta p = -\rho\, g\, \Delta h$

Για Δp = (0- 10^5) N/m^2, έχουμε Δh = 8333 m.

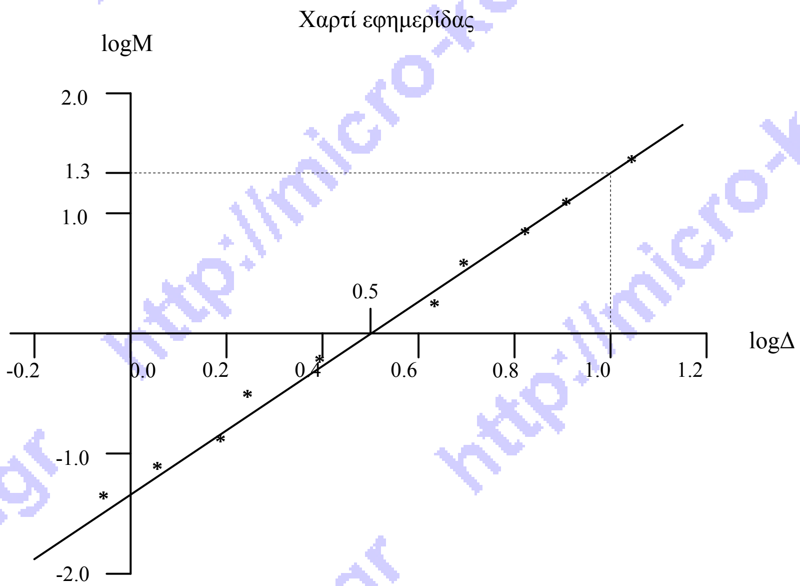
Πειραματικό Μέρος

Μετρώντας τη fractal διάσταση

Τα περισσότερα αντικείμενα του φυσικού κόσμου δεν περιγράφονται εύκολα από Ευκλείδεια σχήματα. Τα μορφοκλασματικά σχήματα (fractals) είναι πλέον ένα θέμα με πλατύ ενδιαφέρον και εδώ περιγράφουμε ένα παράδειγμα πειραματικού προσδιορισμού της μορφοκλασματικής (fractal) διάστασης. Η fractal διάσταση στην περίπτωση που θα εξετάσουμε, μας πληροφορεί για την πολυπλοκότητα ή τα κενά που δημιουργούνται στο εσωτερικό των κατασκευών μας.

Χαρτί εφημερίδας έχει επιφανειακή πυκνότητα σ=80 g/m^2. (Δηλαδή ένα τετραγωνικό μέτρο από το χαρτί αυτό έχει μάζα 80 γραμμάρια). Από το χαρτί αυτό κόβουμε δέκα τετράγωνα, που το καθένα έχει πλευρά $\frac{1}{\sqrt{2}}$ φορές το μήκος της πλευράς του αμέσως μεγαλύτερου. Το μεγαλύτερο από τα τετράγωνα έχει πλευρά $L=\frac{\sqrt{2}}{4}$ m.

Στη συνέχεια τσαλακώνουμε τα χάρτινα τετράγωνα και τα συμπιέζουμε ώστε να δημιουργήσουμε 10 μπάλες από τσαλακωμένο χαρτί (ο τρόπος που το κάνουμε αυτό μοιάζει με τον τρόπο που φτιάχνουμε μπαλίτσες με ψίχα από ψωμί, συμπιέζοντάς το ομοιόμορφα με τις παλάμες μας). Κατόπιν μετράμε τη διάμετρό τους στις τρεις ορθογώνιες διαστάσεις και υπολογίζουμε τη μέση διάμετρο Δ κάθε μπάλας.



Στο διπλανό διάγραμμα εμφανίζονται οι τιμές του λογαρίθμου της μάζας Μ κάθε σφαίρας μετρημένης σε g και υπολογισμένης από την επιφανειακή πυκνότητα του χαρτιού και του λογαρίθμου της μέσης διαμέτρου Δ σε cm που προέκυψε από την πραγματοποίηση της πειραματικής διαδικασίας από εμάς

Σημείωση: Σε πολλές περιπτώσεις όπου έχουμε μεγέθη που δε μεταβάλλονται γραμμικά, αντί να σχεδιάζουμε διαγράμματα με τις τιμές τους, δημιουργούμε διαγράμματα με τους λογαρίθμους τους με αποτέλεσμα να προκύπτουν διαγράμματα που είναι γραμμικά και από την κλίση τους να εξάγουμε χρήσιμες πληροφορίες.

Αν $Ψ=cX^d$ όπου c, d σταθερές τότε λογαριθμίζοντας έχουμε: $\log Ψ=\log c+d\log X$.

Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα:

1) Πόση είναι η μάζα κάθε μίας από τις τρεις μπάλες μεγαλύτερης διαμέτρου από τσαλακωμένο χαρτί;

2) Η μάζα κάθε τετραγώνου από αυτά που κατασκευάσαμε, από ποια από τις παρακάτω αναλογίες εκφράζεται:

   Α) $M=\alpha L$, Β) $M=\alpha L^2$, Γ) $M=\alpha L^3$ Δ) $M=\alpha L^d$

   όπου $2<d<3$ και α=σταθ.

3) Αν μελετούσαμε συμπαγείς σφαίρες και όχι τις μπάλες μας από τσαλακωμένο χαρτί για τη μάζα τους σε σχέση με τη διάμετρό τους ποια από τις παρακάτω αναλογίες ισχύει:

   Α) $M=\beta\Delta$, Β) $M=\beta\Delta^2$, Γ) $M=\beta\Delta^3$, Δ) $M=\beta\Delta^d$

   όπου $2<d<3$ και β=σταθ.

   Δίνεται ότι ο όγκος σφαίρας είναι $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ (R: η ακτίνα της)

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

4) Ποια είναι η κλίση του παραπάνω διαγράμματος;

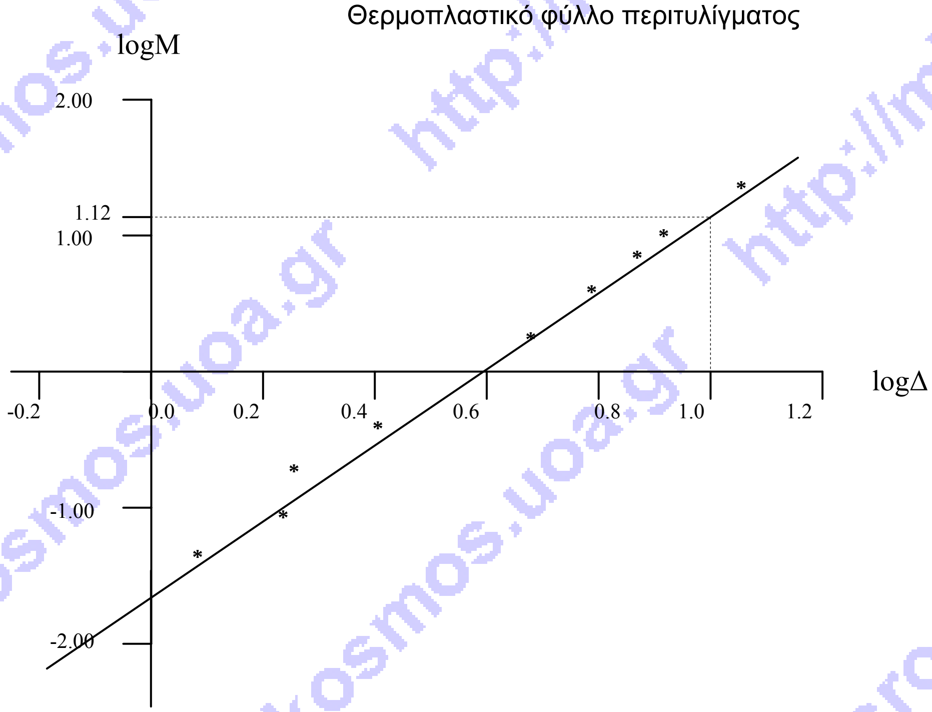
5) Για τις μάζες των μπαλών που φτιάξαμε από τσαλακωμένο χαρτί ισχύει η σχέση $M=\gamma\Delta^d$, με γ σταθερά.

   Από το διάγραμμα που προέκυψε από την πειραματική διαδικασία, ποια τιμή προκύπτει για τη διάσταση d.

   Α) d=1, Β) d= 1,5, Γ) d=3, Δ) $2<d<3$

   Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Θερμοπλαστικό φύλλο περιτυλίγματος



6) Αν επαναλάβουμε το πείραμα με τετράγωνα από θερμοπλαστικό φύλλο περιτυλίγματος προκύπτει το διάγραμμα του παρακάτω σχήματος.

Πώς εξηγείτε το γεγονός ότι η fractal διάσταση στην περίπτωση του θερμοπλαστικού φύλλου περιτυλίγματος είναι μεγαλύτερη;

Συνοπτικές απαντήσεις / λύσεις:

1) Για να υπολογίσουμε τη μάζα που έχουν οι μπάλες από τσαλακωμένο χαρτί βρίσκουμε πρώτα τα εμβαδά των τετραγώνων από τα οποία κατασκευάσαμε τις μπάλες, και τα πολλαπλασιάζουμε με την επιφανειακή πυκνότητα του χαρτιού εφημερίδας.

$$M_1 = L^2\sigma = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \cdot 80\,\text{g} = 10\text{ g}$$

$$M_2 = \left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \sigma = \frac{1}{2}L^2 \cdot \sigma = \frac{1}{2}M_1 = 5\text{ g}$$

$$M_3 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 \cdot \sigma = \frac{1}{4}L^2 \cdot \sigma = \frac{1}{4}M_1 = 2.5\text{ g}$$

2) Η σωστή αναλογία είναι η Β. Όπου L η πλευρά κάθε τετραγώνου.

3) Η σωστή αναλογία είναι η Γ. Η μάζα της σφαίρας είναι $M = \rho V$ όπου ρ η πυκνότητα και V ο όγκος της σφαίρας. Δηλαδή : $M = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\rho 4\pi \Delta^3}{3\cdot 2^3} = \beta\Delta^3$

4) Η κλίση του διαγράμματος είναι $d = \frac{1.3}{1-0.5} = \frac{1.3}{0.5} = 2.6$

5) Λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης $M = \gamma\Delta^d$ έχουμε: $\log M = \log\gamma + d\log\Delta$. Αυτή είναι μια γραμμική σχέση μεταξύ του $\log M$ και του $\log\Delta$ η κλίση του διαγράμματος της οποίας είναι η d δηλαδή 2.6. Η σωστή λοιπόν απάντηση είναι η Δ.

6) Οι μπάλες από θερμοπλαστικό φαίνεται από το διάγραμμα ότι έχουν fractal διάσταση: $d = \frac{1.12}{0.4} = 2.8$ δηλαδή πλησιάζουν τη συμπαγή σφαίρα. Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο ότι τα φύλα περιτυλίγματος από θερμοπλαστικό κολλάνε μεταξύ τους με αποτέλεσμα η πολυπλοκότητα και η ανομοιομορφία των κενών που υπάρχουν στο εσωτερικό των μπαλών αυτών να είναι μικρότερη από εκείνη των μπαλών από χαρτί.