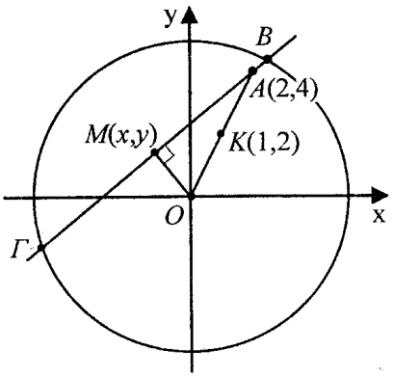
Παρατηρήσεις – Σχόλια – Επεκτάσεις

Μάθημα	Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β' Λυκείου
Κεφάλαιο	3. Κωνικές τομές
Παράγραφος	3.1. Ο Κύκλος
Άσκηση	Β' Ομάδας 10, σελ. 89 (σχολικό βιβλίο)

Άσκηση

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$ που διέρχονται από το σημείο Α(2,4).

Παρατηρήσεις



Για αυτήν την άσκηση το βιβλίο λύσεων (βλ. σχήμα) πρώτα βρίσκει το γεωμετρικό τόπο με τη βοήθεια της ευκλείδειας γεωμετρίας (τελικά είναι ο κύκλος διαμέτρου ΟΑ) και στη συνέχεια εκφράζει τον τόπο αυτό με την εξίσωση από την αναλυτική γεωμετρία.

Έτσι, η λύση της άσκησης δεν αφορά την αναλυτική γεωμετρία παρά μόνο ελάχιστα. Δεν έτυχε κάποιος μαθητής να με ρωτήσει αν και πώς αυτή η άσκηση λύνεται χωρίς ευκλείδεια γεωμετρία, ωστόσο το ερώτημα είναι εύλογο. Πιστεύω πως η άσκηση είναι μισή και άστοχη αν δεν προκαλέσουμε ένα τέτοιο ερώτημα. Πρέπει να τονίσουμε στους μαθητές μας ότι εδώ έχουμε μία άσκηση η οποία λύνεται πολύ γρήγορα και εύκολα με τη συνδρομή της ευκλείδειας γεωμετρίας και ότι αυτό και συμβαίνει και επιτρέπεται να το κάνουμε, αλλά και να αναφερθούμε στη λύση με την αποκλειστική χρήση της αναλυτικής γεωμετρίας. Έστω να πούμε ότι «λύνεται, αλλά δεν αξίζει τον κόπο να αναφερθούμε», ή ότι «η λύση θα είναι επιπέδου που δε μας αφορά».

Ο παραπάνω συλλογισμός με οδήγησε να ψάξω για λύση χωρίς τη χρήση της ευκλείδειας γεωμετρίας. Η ιδέα ήταν να πάρω παραμετρική ευθεία με δεδομένο να διέρχεται από το Α(2,4). Προτίμησα την εξίσωση $y = \lambda x + \beta$ διότι παρά το μειονέκτημα της κατακόρυφης με την επιπλέον διερεύνηση, απομένει ένας άγνωστος για απαλοιφή.

Λύση

Αρχικά υποθέτουμε ότι η χορδή δεν είναι κατακόρυφη (την περίπτωση της κατακόρυφης χορδής θα την ελέγξουμε αργότερα).

Έστω $\varepsilon : y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της χορδής η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία $M_1(x_1,y_1)$ και $M_2(x_2,y_2)$ (Β και Γ για το σχήμα) και Μ(x,y) το μέσο του τμήματος M_1M_2. Διαδοχικά έχουμε:

$A(2,4) \in \varepsilon \Leftrightarrow \beta = 4 - 2\lambda$, άρα η εξίσωση της ευθείας γίνεται $\varepsilon : y = \lambda x + 4 - 2\lambda$.

Τα σημεία M_1, M_2 ως σημεία τομής του κύκλου και της ευθείας, θα προκύπτουν από το σύστημα των εξισώσεών τους. Έτσι:

$$x^2 + y^2 = 25 \overset{y=\lambda x+4-2\lambda}{\Rightarrow} x^2 + (\lambda x + 4 - 2\lambda)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + \lambda^2 x^2 + 16 + 4\lambda^2 + 8\lambda x - 4\lambda^2 x - 16\lambda = 25 \Rightarrow$$

$$(\lambda^2 + 1)x^2 + 4\lambda(2 - \lambda)x + 4\lambda^2 - 16\lambda - 9 = 0$$

<u>Σημείωση</u>:

Όπως θα ήταν αναμενόμενο, το παραπάνω τριώνυμο έχει πάντα λύση, καθώς η διακρίνουσα προκύπτει $\Delta = 84\lambda^2 + 64\lambda + 36 > 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ και $\Delta_\lambda < 0$ (είναι αναμενόμενο διότι οι λύσεις του

τριωνύμου αντιστοιχούν στα σημεία τομής του κύκλου και της ευθείας που εδώ θα είναι πάντα δύο, καθώς έχουμε ήδη απαιτήσει η ευθεία να διέρχεται από το σημείο Α που βρίσκεται εσωτερικά του κύκλου).

Τα x_1, x_2 θα είναι οι ρίζες της εξίσωσης με $S = x_1 + x_2 \overset{-\frac{\beta}{\alpha}}{=} -\frac{4\lambda(2-\lambda)}{\lambda^2+1} = \frac{4\lambda(\lambda-2)}{\lambda^2+1}$ και, επειδή Μ μέσο M_1M_2 θα ισχύει $x = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{2\lambda(\lambda-2)}{\lambda^2+1}$

Το y, καθώς $M \in \varepsilon$, θα είναι

$$y = \lambda x + 4 - 2\lambda = \lambda\frac{2\lambda(\lambda-2)}{\lambda^2+1} + 4 - 2\lambda = \frac{2\lambda^2(\lambda-2)+(\lambda^2+1)(4-2\lambda)}{\lambda^2+1} = \frac{2\lambda^3-4\lambda^2+4\lambda^2-2\lambda^3+4-2\lambda}{\lambda^2+1} = \frac{-2(\lambda-2)}{\lambda^2+1}$$

άρα, ως συνάρτηση του λ, το σημείο Μ θα είναι το $M\left(\frac{2\lambda(\lambda-2)}{\lambda^2+1}, \frac{-2(\lambda-2)}{\lambda^2+1}\right), \lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Σημείωση</u>:
Στο σημείο αυτό πρέπει να γίνει απαλοιφή του λ. Η απαλοιφή του λ ήταν το δυσκολότερο σημείο της λύσης. Θα μπορούσαμε να πούμε:

Παρατηρούμε ότι $(x-1)^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{2\lambda(\lambda-2)}{\lambda^2+1} - 1\right)^2 + \left(\frac{-2(\lambda-2)}{\lambda^2+1} - 2\right)^2 = \ldots = 5$!!!

(Μετά από πράξεις, όπως θα ήταν αναμενόμενο, πράγματι βγαίνει 5).
Αλλά αυτό δεν θα ήταν λύση, αλλά διαπίστωση η οποία προκύπτει από το ότι γνωρίζουμε τον γεωμετρικό τόπο από την λύση με τη χρήση της ευκλείδειας γεωμετρίας. Το ζητούμενο, όμως, είναι ο γεωμετρικός τρόπος να προκύψει και όχι απλώς να διαπιστωθεί.
Επίσης, αυτό το κομμάτι της άσκησης θα μπορούσε να σταθεί ως ξεχωριστή άσκηση με διατύπωση: Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ με συντεταγμένες $M\left(\frac{2\lambda(\lambda-2)}{\lambda^2+1}, \frac{-2(\lambda-2)}{\lambda^2+1}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις διάφορες τιμές του λ. Τελικά μία λύση είναι η εξής:

Παρατηρούμε ότι $x = \frac{2\lambda(\lambda-2)}{\lambda^2+1} = -\lambda\frac{-2(\lambda-2)}{\lambda^2+1} = -\lambda y$, άρα $x = -\lambda y$, άρα αν $y \neq 0$ τότε $\lambda = -\frac{x}{y}$,

<u>Σημείωση</u>:
Η τελευταία σχέση επιβεβαιώνει την ευκλείδεια γεωμετρία και τη λύση της με τη βοήθεια του αποστήματος στον κύκλο, δηλαδή ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{OM} = (x, y)$ είναι κάθετο στην ευθεία ε. Αυτό φαίνεται καλύτερα αν γράψουμε τη σχέση $\lambda \cdot \frac{y}{x} = -1$.

έτσι έχουμε

$$y = \frac{-2(\lambda-2)}{\lambda^2+1} \Leftrightarrow y = \frac{-2(-\frac{x}{y}-2)}{\left(-\frac{x}{y}\right)^2+1} \Leftrightarrow y = 2\frac{\frac{x}{y}+2}{\frac{x^2}{y^2}+1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{y} + y = 2\frac{x}{y} + 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x + 4y \Leftrightarrow$$

$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$, με $y \neq 0$

Η τελευταία εξίσωση είναι η εξίσωση του κύκλου που περιμέναμε να βρούμε, δηλ. με κέντρο το Κ(1,2) και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$, αλλά με τον περιορισμό $y\neq 0$. Ο περιορισμός αυτός εξαιρεί από τον κύκλο δύο σημεία, τα (0,0) και (2,0).

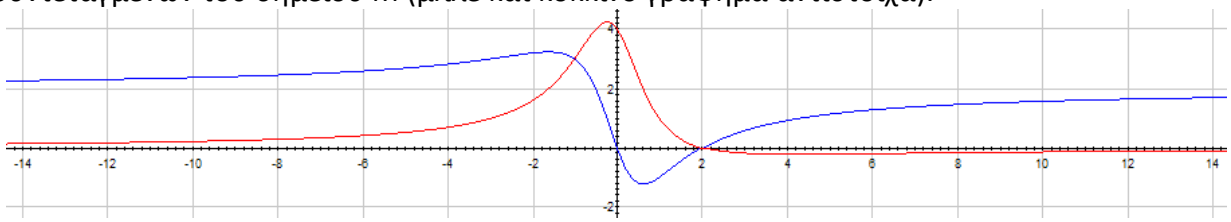
Ξεχωριστά ελέγχουμε:
Αν y=0, τότε λ=2, άρα x=0. Έτσι, το σημείο Ο(0,0) συμπεριλαμβάνεται στο γεωμετρικό τόπο και συμπληρώνει το σημείο που έλειπε από τον κύκλο.

Τέλος, αν η χορδή είναι κατακόρυφη, τότε αυτή είναι η ε: x = 2 καθώς διέρχεται από το Α(2,4). Εύκολα προκύπτει ότι τα σημεία M_1, M_2 είναι τα $M_1(2,\sqrt{21})$ και $M_2(2,-\sqrt{21})$ και το μέσο τους είναι το σημείο Μ(2,0) το οποίο και πάλι συμπληρώνει και το τελευταίο σημείο που έλειπε από τον κύκλο.

Τελικά ο γεωμετρικός τόπος των σημείων είναι ο κύκλος κέντρου Κ(1,2) και ακτίνας $\rho=\sqrt{5}$.
Η εξίσωση του κύκλου αυτού είναι $x^2+y^2-2x-4y=0$ ή ισοδύναμα $(x-1)^2+(y-2)^2=5$.

Επέκταση

Παρακάτω αποδίδονται γραφικά οι συναρτήσεις $x(\lambda)=\dfrac{2\lambda(\lambda-2)}{\lambda^2+1}$ και $y(\lambda)=\dfrac{-2(\lambda-2)}{\lambda^2+1}$ των συντεταγμένων του σημείου Μ (μπλε και κόκκινο γράφημα αντίστοιχα).



Μερικές από τις παρατηρήσεις που προκύπτουν από τα γραφήματα αυτά είναι:

- Για λ=2 είναι x=0 και y=0 όπως ελέγχθηκε ξεχωριστά στη λύση. Επιπλέον, τότε η χορδή είναι διάμετρος του κύκλου καθώς $\lambda=\lambda_{\overline{OA}}=2$ και έτσι το μέσο Μ είναι το κέντρο Ο.
- Όταν το λ τείνει σε άπειρο (σε οποιοδήποτε), τότε το x τείνει να γίνει 2, ενώ το y τείνει να γίνει 0. Αυτό ερμηνεύεται με το ότι η ευθεία τείνει να γίνει κατακόρυφη και τότε το μέσο της χορδής είναι το (2,0) που προέκυψε ως ειδική περίπτωση.
- Το x παίρνει τιμές από το διάστημα $[1-\sqrt{5},1+\sqrt{5}]$ δηλ. περίπου $[-1{,}2\ ,\ 3{,}2]$ και το y παίρνει τιμές από το διάστημα $[2-\sqrt{5},2+\sqrt{5}]$ δηλ. περίπου $[-0{,}2\ ,\ 4{,}2]$.
  Όταν το ένα γίνεται μέγιστο ή ελάχιστο, το άλλο παίρνει την «κεντρική» του τιμή, δηλ. το x γίνεται μέγιστο ή ελάχιστο όταν το y είναι 2, αντίστοιχα για το y όταν το x είναι 1.
- Για λ=0 είναι y=4 και x=0, όπως θα το περιμέναμε, καθώς η χορδή τότε θα είναι οριζόντια.
- Η χορδή θα έχει μέσο το Α όταν το απόστημα θα είναι το τμήμα ΟΑ, δηλ. όταν η χορδή θα είναι κάθετη στο τμήμα ΟΑ. Ο συντελεστής διεύθυνσης του $\overrightarrow{OA}=(2,4)$ είναι $\lambda_{\overline{OA}}=\dfrac{4}{2}=2$, άρα η χορδή θα έχει συντελεστή διεύθυνσης αντιθετοαντίστροφο.
  Πράγματι για $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ είναι x=2 και y=4.

Πετρίδης Παντελής
Μαθηματικός
ppetridis@sch.gr
users.sch.gr/ppetridis