

ΦΥΛΛΟ 9

Δ1.	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0$	$2x^2 - 5x + 3 = 0$
	<ul style="list-style-type: none"> • Μετατρέψτε την εξίσωση σε ισοδύναμη με συντελεστής στο x^2 το 1. • Μετατρέψτε την εξίσωση στην οποία ο συντελεστής του x να είναι στη μορφή $2k$. • Μεταφέρετε τους γνωστούς όρους στο 2^ο μέλος και κάντε ότι πράξεις μπορείτε. • Προσθέστε και στα δύο μέλη κατάλληλο όρο ώστε το 1^ο μέλος να πάρει τη μορφή $(x + \lambda)^2$ • Λύστε την εξίσωση που προέκυψε. 	
Δ2.	<p>Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0$</p> <p>1. Βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης στην περίπτωση όπου $\Delta > 0$. $x_1 = \dots\dots\dots, \quad x_2 = \dots\dots\dots$</p> <p>2. Βρείτε το άθροισμα $x_1 + x_2$ των παραπάνω ριζών και συμβολίστε το με S. $S = x_1 + x_2 = \dots\dots\dots$</p> <p>3. Βρείτε το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$ των παραπάνω ριζών και συμβολίστε το με P. $P = x_1 \cdot x_2 = \dots\dots\dots$</p>	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x^2 - x\sqrt{5} - 10 = 0$ β) $x^2 - 6x\sqrt{2} + 10 = 0$ γ) $3x^2 - (2 - 3\sqrt{7})x - 2\sqrt{7} = 0$

2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων.

α) $(\lambda + 8)x^2 + (\lambda + 2)x + \frac{\lambda}{4} = 0$

γ) $(\lambda - 3)x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda + 3 = 0$

β) $x^2 - (2\lambda - 4)x - \lambda(3 - \lambda) = 0$

δ) $(\lambda + 3)x^2 - 2(\lambda + 2)x + \lambda = 0$

13. A. Δίνεται η εξίσωση $3x^2 - 2(\lambda - 3)x - 4\lambda = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η (1) έχει, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, πραγματικές ρίζες.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η (1) έχει ρίζες :

i) αντίθετες ii) αντίστροφες iii) ομόσημες iv) ετερόσημες

B. Ομοίως για την εξίσωση $2x^2 - (\lambda - 4)x + 2 - \lambda = 0$.

14. A. Δίνεται η εξίσωση $4x^2 - (\alpha - 6)x + 2 - \alpha = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η (1) έχει, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, πραγματικές ρίζες.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η (1) έχει ρίζες :

i) θετικές ii) αρνητικές

B. Ομοίως για την εξίσωση $3x^2 - (\alpha - 2)x + \alpha - 5 = 0$.

15. Να βρείτε για ποιες τιμές του α έχει ρίζες (πραγματικές και) αντίθετες η εξίσωση :

α) $-3x^2 + (2\alpha^2 - 8)x + 5 = 0$

γ) $4x^2 - (\alpha^2 + 5\alpha - 6)x + 5\alpha - 2 = 0$

β) $-x^2 - (|\alpha - 1| - 4)x + 3 = 0$

16. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ έχει ρίζες (πραγματικές και) αντίστροφες η εξίσωση :

α) $2x^2 - (\lambda - 3)x + \lambda^2 + \lambda = 0$

β) $-x^2 + (\lambda - 5)x + \lambda^2 - 3\lambda - 5 = 0$

17. A. Να βρείτε για ποιες τιμές των λ, μ η εξίσωση $x^2 + (2\lambda - 6)x + \mu + 5 = 0$ έχει ρίζες

x_1, x_2 με $x_1 < x_2 = 0$.

B. Να βρείτε για ποιες τιμές των λ, μ η εξίσωση $-x^2 + (4\mu - 8)x + \lambda - 5 = 0$ έχει ρίζες

x_1, x_2 με $0 = x_1 < x_2$.

18. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $-4x^2 + (\alpha - 1)x + 6 - \alpha = 0$ έχει ετερόσημες ρίζες, με την θετική να έχει μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

19. Αν μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 + 12x - \lambda = 0$ είναι διπλάσια της άλλης, να βρείτε την τιμή του λ .

20. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $x^2 + (2\lambda - 1)x - 8 = 0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_2 = x_1^2$.

21. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 3 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2 για τις οποίες ισχύει :

α) $4x_1x_2 + 5(x_1 + x_2) + 10 = 0$

β) $(2x_1 - 3)(2x_2 - 3) = 5$

22. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $2x^2 + 4x + 3\lambda - 1 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2 για τις οποίες ισχύει:

α) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -4$

β) $\frac{1}{2x_1 - 1} + \frac{1}{2x_2 - 1} = \frac{2}{3}$

23. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - (\lambda - 2)x + \lambda - 6 = 0$ (1).

- α) Να αποδείξετε ότι η (1) έχει, για κάθε τιμή του λ , πραγματικές ρίζες.
 β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

α) $\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2} = 2$ β) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 16$ γ) $(x_1^2 + x_1 x_2)(x_2^2 + x_1 x_2) = 2(\lambda - 6)$

24. Για ποιες τιμές του λ το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της εξίσωσης $2x^2 - 4\lambda x + 2\lambda - 1 = 0$ είναι ίσο με 1.

25. Να λύσετε την εξίσωση $-5x^2 + 10x + \gamma = 0$, αν είναι γνωστό ότι για τις ρίζες της x_1, x_2 ισχύει $3x_1 - 2x_2 = 16$.

26. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 3x - 5 = 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 πραγματικές και άνισες.
 β) Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων.

i) $\frac{-5}{x_1 + x_2}$ iv) $\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 x_2}$ vi) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ viii) $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$
 ii) $x_1 x_2$ v) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ vii) $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$ ix) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$
 iii) $x_1^2 + x_2^2$ x) $|x_1 - x_2|$

27. Να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς :

α) $\frac{1}{2}$ και -2 γ) $1 + \alpha$ και $1 - \alpha$
 β) $\sqrt{3} + 2$ και $2 - \sqrt{3}$ δ) $\frac{\alpha}{3}$ και -3α

28. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 1 = 0$. Χωρίς να βρείτε τα x_1, x_2 , να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς :

α) $2x_1$ και $2x_2$ ε) $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$ η) $|x_1|$ και $|x_2|$
 β) $\frac{x_1}{2}$ και $\frac{x_2}{2}$ στ) x_1^3 και x_2^3
 γ) $2x_1 - 3$ και $2x_2 - 3$ ζ) $\frac{3x_1 + 1}{x_1 - 3}$ και $\frac{3x_2 + 1}{x_2 - 3}$
 δ) x_1^2 και x_2^2

29. Αν $\alpha(\alpha + \beta + \gamma) \neq 0$, και η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 , να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\alpha + \beta + \gamma)x^2 - 2(\alpha - \gamma)x + \alpha - \beta + \gamma = 0$ έχει ρίζες τους $\frac{1+x_1}{1-x_1}$ και $\frac{1+x_2}{1-x_2}$.

30. Να λύσετε χωρίς να χρησιμοποιήσετε τη διακρίνουσα Δ και τον τύπο των ριζών, τις εξισώσεις :

α) $x^2 - 5x + 4 = 0$ δ) $x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2 = 0$ στ) $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 = 0$
 β) $x^2 - 10x + 25 = 0$ ε) $x^2 + 4\alpha x + 3\alpha^2 = 0$
 γ) $x^2 - 5x - 6 = 0$

31. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{3}{2}$

ε) $\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2x-x^2}$

β) $\frac{5}{x-2} + \frac{2}{x-5} = 2$

στ) $\frac{x+1}{4x} - \frac{5x-1}{2x-4} = \frac{8-x}{3x^2-6x} - \frac{x-5}{x-2}$

γ) $\frac{16}{x^2-4} = \frac{x-2}{x+2} - \frac{1}{x-2}$

ζ) $\frac{x}{x-2} + \frac{x-8}{x} = \frac{4}{x^2-2x}$

δ) $1 - \frac{3}{x+3} = \frac{9}{x^2+3x}$

η) $\frac{5x+20}{x^2+4x} + \frac{14}{x^2-2x} = \frac{x}{2-x}$

32. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $(x^2+1)^2 - 6(x^2+1) + 8 = 0$

ε) $x - 7\sqrt{x} + 10 = 0$

β) $(x^2+2x-3)^2 + 5(x^2+2x-3) + 4 = 0$

στ) $\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) = 10$

γ) $2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 - 7\left(1-\frac{1}{x}\right) + 6 = 0$

ζ) $(x^2-4x+2)^2 + 4(x^2-4x) + 11 = 0$

δ) $\left(\frac{1-2x}{x}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{x}-2\right) + 5 = 0$

33. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x^2 + 3|x| - 4 = 0$

ε) $(x+2)^2 + 2|x+2| - 3 = 0$

β) $x^2 - |-5x| + 6 = 0$

στ) $3(2x+1)^2 - 14\left|x + \frac{1}{2}\right| + 4 = 0$

γ) $5|x| - 4 = x^2$

δ) $4x^2 + |x| - 4 = 5(|x|-2)$

ζ) $(x+2)^2 - 3\sqrt{x^2+4x+4} + 2 = 0$

34. Να βρείτε για ποιες τιμές του α έχει ρίζες (πραγματικές και) αντίθετες η εξίσωση $x^2 - (2+|α|-α^2)x + π - 4 = 0$.

35. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x^4 - 4x^2 - 1 = 0$

δ) $64x^4 - 63x^2 - 1 = 0$

β) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

ε) $|x^2 - 4|x| + 3| + |x^4 - 10x^2 + 9| = 0$

γ) $-x^8 + 17x^4 = 16$

36. Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου είναι 3 cm, 5 cm και 7 cm. Αν κάθε πλευρά αυξηθεί κατά x cm, τότε το τρίγωνο θα γίνει ορθογώνιο. Να υπολογίσετε το x.

37. Μια παρέα σπουδαστών μίσθωσε ένα αυτοκίνητο για μια εβδομάδα και πλήρωσαν 400 €. Εάν κάποιος άλλος σπουδαστής προστεθεί στην παρέα, το μερίδιο του καθενός από το μίσθωμα θα ελαττωθεί κατά 20 €. Πόσοι ήταν οι σπουδαστές στην αρχική παρέα ;

38. Μια δεξαμενή γεμίζει από δύο βρύσες Α και Β, αν ανοίξουν μαζί, σε 6 ώρες. Η δεξαμενή γεμίζει από τη βρύση Α σε 5 ώρες λιγότερο από ό,τι γεμίζει από τη βρύση Β. Πόσες ώρες χρειάζεται η βρύση Α για να γεμίσει τη δεξαμενή μόνη της ;

39. Το ψηφίο των δεκάδων ενός διψήφιου αριθμού είναι κατά 2 μεγαλύτερο από το ψηφίο των μονάδων του, ενώ το άθροισμα των τετραγώνων των ψηφίων του είναι κατά 14 μεγαλύτερο από τον αριθμό αυτό. Να βρείτε τον αριθμό.
40. Ένας οδηγός κινούμενος με το αυτοκίνητό του με σταθερή ταχύτητα u , διένυσε μια απόσταση 240 km. Αν η ταχύτητά του ήταν κατά 20 km/h μεγαλύτερη, θα διένυε την απόσταση σε χρόνο λιγότερο κατά 1 ώρα. Να βρείτε την ταχύτητα u .
41. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 + (2P + 1)x - 3S + 2 = 0$, αν είναι γνωστό ότι έχει πραγματικές ρίζες με άθροισμα S και γινόμενο P .
42. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$ (1).
- Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
 - Να βρείτε το λ , ώστε η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ίση με το τετράγωνο της άλλης.
 - Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) για τη μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε.
 - Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \frac{x_1 + 2}{x_2} + \frac{x_2 + 2}{x_1}$.
 - Να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1 - 1}$ και $\frac{1}{x_2 - 1}$.
43. Δίνεται η εξίσωση $-x^2 - 2ax + a^2 + \beta^2 + 2 = 0$ (1).
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς a και β .
 - Έστω S και P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1). Να βρείτε τα a και β ώστε να ισχύει $2S = P - 2$.
 - Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) για τις τιμές των a και β που βρήκατε.
 - Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \frac{x_1 + 1}{x_1 + 2} + \frac{x_2 + 1}{x_2 + 2}$.
 - Να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $\frac{x_1^2}{x_2}$ και $\frac{x_2^2}{x_1}$.