

## ΦΥΛΛΟ 6

1. Να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε η ευθεία που ορίζεται από την εξίσωση  $(2\alpha - \beta + 5)x + (\alpha - 3\beta - 3)y + 2\alpha + 7\beta + 15 = 0$  να είναι παράλληλη στον άξονα  $y'y$  και να διέρχεται από το σημείο  $A(5, 0)$ .
2. Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$  η εξίσωση  $(2 - \mu)x - (\mu + 5)y + \mu - 1 = 0$  παριστάνει :
  - i) Ευθεία
  - ii) Ευθεία  $\varepsilon$  παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .
  - iii) Ευθεία  $\varepsilon$  παράλληλη στον άξονα  $y'y$ .
  - iv) Ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
3. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες  $(\alpha^2 + 1)x + (\alpha - 1)y - 3\alpha^2 + \alpha - 4 = 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  διέρχονται από το ίδιο σημείο.
4. Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : \lambda x + (\lambda + 1)y + 1 = 0$  και  $\varepsilon_2 : x + 2y - \lambda + 2 = 0$ .
  - i) Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ .
  - ii) Αν οι  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  τέμνονται, να αποδείξετε ότι καθώς το  $\lambda$  μεταβάλλεται, το σημείο τομής τους ανήκει σε σταθερή ευθεία.
5. Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : \lambda x + (\lambda - 1)y - 1 = 0$  και  $\varepsilon_2 : 4x + \lambda y + \lambda - 2 = 0$ . Να βρείτε για ποια τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$  ισχύει :
  - i)  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ ,
  - ii)  $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$
6. Να βρεθούν οι τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$ , ώστε οι ευθείες  $\varepsilon_1 : (\mu - 2)x + 3y + 9 = 0$  και  $\varepsilon_2 : (\mu - 4)x + (\mu - 6)y + 2 = 0$  να είναι κάθετες.
7. Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : x - y + 1 = 0$  και  $\varepsilon_2 : x - y + 5 = 0$ . Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι μεσοπαράλληλη των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .
8. Αν η ευθεία  $\zeta : x - 2y + 1 = 0$  είναι μεσοπαράλληλος των ευθειών  $\varepsilon_1 : x - 2y + \alpha = 0$  και  $\varepsilon_2 : 2x - 4y + \alpha + 2 = 0$ , να βρείτε την παράμετρο  $\alpha$ .
9. Να βρεθεί η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες  $\varepsilon_1 : x - 3y + 2 = 0$  και  $\varepsilon_2 : -2x + y + 4 = 0$ .
10. Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών  $\varepsilon_1 : 2\lambda x - (\lambda + 1)y + \mu = 0$  και  $\varepsilon_2 : (3\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + \kappa = 0$ .

11. Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1: (2\lambda - 1)x + \lambda y - 2 = 0$  και  $\varepsilon_2: -x + y + 1 = 0$ . Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε η γωνία των  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  να είναι ίση με  $\frac{\pi}{3}$ .
12. Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες  $\varepsilon_1: 3x - 4y + 1 = 0$  και  $\varepsilon_2: 5x + 12y - 2 = 0$ . Ποια είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας;
13. Θεωρούμε τα σημεία  $A(3, 2)$ ,  $B(-1, -2)$  και  $\Gamma(5, 0)$ . Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
14. Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $A(1, -2)$  και οι εξισώσεις των δύο πλευρών του είναι  $x - y + 1 = 0$  και  $x + y + 3 = 0$ . Να βρείτε την κορυφή του  $\Gamma$  και τις εξισώσεις των άλλων πλευρών του.
15. Δίνονται οι εξισώσεις  $8x + 3y + 1 = 0$ ,  $2x + y - 1 = 0$  δύο πλευρών ενός παραλληλογράμμου και η εξίσωση  $3x + 2y + 3$  μιας διαγωνίου του. Να βρείτε τις κορυφές του.
16. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(-1, 2)$ . Αν η εξίσωση της μιας πλευράς του είναι  $x - 2y + 1 = 0$  και το ύψος  $B\Delta$  έχει εξίσωση  $x + 2y + 3 = 0$ , να βρείτε τις κορυφές  $B$  και  $\Gamma$ .
17. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(-1, 2)$ . Αν η εξίσωση της μιας πλευράς του είναι  $x + 2y - 4 = 0$  και η διάμεσος  $B\Delta$  έχει εξίσωση  $x - y + 1 = 0$ , να βρείτε τις κορυφές του  $B$  και  $\Gamma$ .
18. Η κορυφή  $A$  τριγώνου  $AB\Gamma$  έχει συντεταγμένες  $(2, 1)$  και οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται τα δύο ύψη του έχουν εξισώσεις  $y = -3x + 11$  και  $y = x + 3$ . Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του.
19. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται η πλευρά  $AB$ , η διάμεσος  $\Gamma M$  και το ύψος  $A\Delta$  έχουν εξισώσεις  $y = x - 2$ ,  $y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$  και  $y = -\frac{2}{3}x + 3$  αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του  $A, B, \Gamma$ .
20. Η κορυφή  $A$  τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι το σημείο  $(1, 2)$ , ενώ οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται δύο διαμέσοι του είναι οι  $\varepsilon_1: x - 3y + 1 = 0$  και  $\varepsilon_2: y = 1$ . Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών  $B$  και  $\Gamma$ .
21. Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $A(1, 2)$  και δύο ύψη έχουν εξισώσεις  $x + y - 1 = 0$  και  $x - 2y = 0$ . Να βρεθεί η εξίσωση της πλευράς  $B\Gamma$  και το εμβαδόν του τριγώνου.
22. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη προς την ευθεία  $\varepsilon: 3x - 4y + 10 = 0$  και απέχει από το σημείο  $M(6, 2)$  απόσταση ίση με 1.
23. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο  $M(4, 1)$  και απέχει από το σημείο  $N(5, 3)$  απόσταση ίση με 1.

24. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $M(1, -4)$  και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν  $E=1$ .
25. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών, οι οποίες είναι κάθετες προς την ευθεία  $\varepsilon: 6x-3y+10=0$  και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν  $E=9$ .
26. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  του επιπέδου των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τις ευθείες  $\varepsilon_1: x-2y=0$  και  $\varepsilon_2: x+2y=0$  αντίστοιχα είναι ίσος με 2.
27. Δίνεται το σημείο  $A(1, -3)$  και το σημείο  $B$  που κινείται στην ευθεία  $\varepsilon: 2x+3y=-2$ .  
Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου  $M$  του  $AB$ .
28. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - y^2 + 4\lambda x + 2\lambda y + 3\lambda^2 = 0$  (1),  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  που είναι κάθετες.
  - ii) Να βρείτε το σημείο τομής  $M$  των ευθειών  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ .
  - iii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$ .