

ΤΟ ΕΚ ΔΙΧΟΤΟΜΙΑΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΖΗΝΩΝΟΣ

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ
ΤΟΥ ΖΗΝΩΝΟΣ

Βασική αρχή του Ζήνωνος είναι πως *‘δεν υπάρχει κίνηση’*, και ότι η κίνηση που αντιλαμβανόμαστε με τις αισθήσεις ή με την ατομική κινητική μας δραστηριότητα, είναι απλώς μία απάτη των αισθήσεων. Πάνω σ’ αυτήν την θεμελιώδη αρχή προσπάθησε να βρει, και όντως βρήκε, τέσσερις

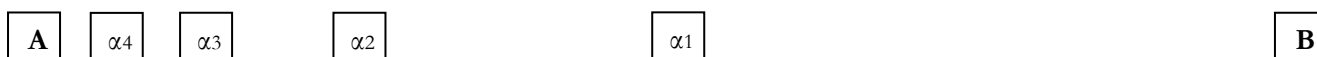
αποδείξεις, οι οποίες όμως παρουσιάζουν από τότε μέχρι και σήμερα σοβαρά προβλήματα κατανόησης. Όλες οι αποδείξεις του Ζήνωνος έχουν σήμερα διασωθεί χάρη στην κριτική που τους άσκησε ο Αριστοτέλης στα έργα του με σκοπό να τις καταρρίψει. Το πρώτο από τα τέσσερα θεωρήματα του Ζήνωνος είναι το γνωστό «έκ διχοτομίας», και απαντά σε τρεις παραπομπές των έργων του Αριστοτέλη, που είναι οι εξής:

1^η) Αριστοτέλης, Φυσικά, 239b11 «ο πρώτος συλλογισμός (του Ζήνωνος) αντικρούει την λογική ότι υφίσταται η έννοια της κινήσεως, διότι ένα ον που κινείται για να φτάσει στο τέρμα, πρέπει να φτάσει στα μισά της διαδρομής...»

2^η) Αριστοτέλης, Τοπικά, 160b7 «Διαθέτουμε πολλά επιχειρήματα που έρχονται σε αντίθεση με τις γνώμες όλων, όπως για παράδειγμα ο συλλογισμός του Ζήνωνος, πως δηλ. δεν είναι δυνατόν να υπάρξει κίνηση, και ότι κανείς δεν μπορεί να διανύσει ένα διάστημα χώρου».

3^η) Αριστοτέλης, Φυσικά, 233a21 «Ο συλλογισμός του Ζήνωνος αρχίζει από μία βάση λαθασμένη, διότι δέχεται πως ένα ον δεν μπορεί να διανύσει άπειρα άλλα πράγματα, ή πάλι να έρθει σε επαφή με κάθε ένα από αυτά εντός συγκεκριμένου χρόνου....».

Το επιχείρημα του Ζήνωνος είναι το εξής: «Αν ένα σώμα β αποφασίσει να ξεκινήσει από ένα σημείο Α για να τερματίσει σε ένα σημείο Β, τότε πρέπει υποχρεωτικά να διέλθει από το ενδιάμεσο της αποστάσεως ΑΒ, που είναι το σημείο α₁. Όμως για να φτάσει στο σημείο α₁, πρέπει υποχρεωτικά να διέλθει από το ενδιάμεσο της αποστάσεως Αα₁, που είναι το σημείο α₂· όμως για να φτάσει στο σημείο α₂, πρέπει υποχρεωτικά να διέλθει από το ενδιάμεσο της αποστάσεως Αα₂, που είναι το σημείο α₃· αλλά και για να φτάσει στο σημείο α₃, πρέπει να διέλθει υποχρεωτικά από το ενδιάμεσο της αποστάσεως Αα₃, που είναι το σημείο α₄». Και ο συλλογισμός συνεχίζεται πάνω στην ίδια βάση, πως δηλ. το β για να φτάσει στο σημείο Β, πρέπει να διέλθει από όλα τα μέσον του κάθε φορά νέου ενδιάμεσου χώρου. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι το β θα πρέπει να διέλθει από ‘άπειρα’ τέτοια σημεία, αφού άπειρες είναι και οι διαιρέσεις του αρχικού τμήματος ΑΒ.



Το θεώρημα αυτό έρχεται σε εμφανή αντίθεση με την ορατή πραγματικότητα. Η ανυπαρξία κινήσεως την οποίαν υποστήριξε ο Ζήνων, διαψεύδεται από την εμπειρική παρατήρηση και την αυθόρμητη διαπίστωση πως *‘αφού περπατάω, άρα κίνηση υπάρχει’*. Όμως ο Ζήνων αρνήθηκε την κίνηση σε θεωρητικό επίπεδο, οπότε και η απλή διαπίστωση πως *‘αφού κινούμαι, υπάρχει κίνηση’* δεν αρκεί για να ακυρωθεί το θεώρημα αυτό· ό,τι αποδεικνύεται θεωρητικά, επίσης θεωρητικά πρέπει και να διαψευσθεί. Όλοι οι στοχαστές από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα πιστεύοντας ότι το θεώρημα αυτό αποτελεί ένα είδος ‘σοφίσματος’ και λογικής εξαπάτησης, προσπάθησαν με διάφορους τρόπους να αποδείξουν την ‘απάτη’ ή το ‘λάθος’ που περιέχει, κι έτσι να απαλλαγούμε επιτέλους από αυτήν την ‘σπαζοκεφαλιά’, η οποία τόσο εμφανώς και απροκάλυπτα έρχεται να διαψεύσει αυτό που όλοι κάνουμε καθημερινά στην ζωή μας, δηλ. ‘κινούμαστε’.

Όμως για να διαψευσθεί το θεώρημα του Ζήνωνος σε επίπεδο θεωρίας, όπως και πρέπει, αυτός που θα επιχειρήσει να το καταρρίψει, πρέπει πρώτα να το αποκαταστήσει σε μία λογική βάση, να το κατανοήσει· είναι αδύνατον να αποδείξει κάποιος το ψεύδος ενός θεωρήματος το οποίο δεν έχει κατανοήσει πλήρως. Όλοι λοιπόν οι αρνητές του Ζήνωνος πρώτα προσπάθησαν να εκλογικεύσουν το θεώρημα αυτό, να το ερμηνεύσουν στην λογική του συμπεριφορά, κι ύστερα επιχειρήσαν να το καταρρίψουν αποδεικνύοντας το λάθος του. Το περίεργο είναι πως όσες προσπάθειες κι αν έγιναν – κι έγιναν πολλές ξεκινώντας από το Αριστοτέλη μέχρι σήμερα – καμία εξ αυτών δεν μπόρεσε ούτε να εκλογικεύσει στο ακέραιο το νόημα του θεωρήματος, αλλά και ούτε φυσικά να αποδείξει με επιτυχία την ‘απάτη’ ή το ‘λάθος’ που κρύβεται μέσα του. Έτσι το θεώρημα του Ζήνωνος μένει εκεί και μας περιγελά καλώντας μας να το διαψεύσουμε, αφού βέβαια πρώτα το ‘κατανοήσουμε’. Με βάση αυτό το θεώρημα του Ζήνωνος μπορούμε όμως να κατασκευάσουμε τα δύο συμπεράσματα που προκύπτουν από το συγκεκριμένο θεώρημα, και που είναι τα εξής:

- (1) Ό,τι κινείται (για να κινείται), πρέπει να εκτελεί άπειρες ενέργειες.
- (2) Κανένα όν δεν μπορεί να εκτελεί άπειρες ενέργειες. Άρα τίποτε δεν κινείται.

Το βασικό πρόβλημα με το θεώρημα του Ζήνωνος είναι πως μας διασώθηκε μόνο όσον αφορά την γενική αρχή και το πνεύμα το οποίο το διείπε, ενώ μας λείπουν – να υπήρξαν ποτέ – οι όποιες διευκρινίσεις και ερμηνείες του θεωρήματος αυτού από τον ίδιο το στοχαστή όσον αφορά τον τρόπο με τον οποίο το αντιλαμβάνονταν και το ερμήνευε. Αυτό έδωσε το δικαίωμα στους μεταγενέστερους στοχαστές να ερμηνεύουν το θεώρημα αυτό και τα συμπεράσματά του, όπως εκείνοι τα αντιλαμβάνοντο. Έτσι κατέληγαν σε μερική ή ολική διαφωνία μαζί του.

Ο τρόπος με τον οποίον ο κάθε επόμενος στοχαστής ερμήνευε το θεώρημα αυτό του Ζήνωνος μας είναι άγνωστος. Έχει όμως διασωθεί η κριτική του πάνω σ' αυτό, και με βάση αυτήν μπορούμε σήμερα να κάνουμε δύο πράγματα, πρώτον να παρουσιάσουμε την κριτική του καθενός, και δεύτερον με βάση αυτήν να ανασυνθέσουμε τον τρόπο με τον οποίον ο κάθε κριτικός σχολιαστής του Ζήνωνος ερμήνευσε το θεώρημα αυτό, πριν το κρίνει. Κάθε κριτική λοιπόν που παρουσιάζεται, παραπέμπει και σε μία διαφορετική ερμηνεία και αντίληψη του «ἐκ διχοτομίας» θεωρήματος. Αν η κριτική που ασκείται πάνω στο θεώρημα αυτό αποδειχθεί λογική και γίνει αποδεκτή, τότε και η ερμηνεία που συναγεται από αυτήν την κριτική θα είναι επίσης κι αυτή σωστή. Για να το πούμε ίσως πιο κατανοητά: Αν μια κριτική πάνω στο «ἐκ διχοτομίας» θεώρημα φανεί πως έχει γίνει πάνω σε σωστή και αιτιολογημένη τεχνική απόδειξης, τότε αυτό θα σημαίνει πως έχει προηγηθεί και μία σωστή ερμηνεία του ίδιου θεωρήματος, διότι είναι αδύνατον μια κριτική πάνω στο 'Χ' να είναι σωστή, αλλά ο τρόπος που το ερμήνευσε και το κατανόησε ο σχολιαστής να είναι εσφαλμένος. Όπως φυσικά συμβαίνει και το αντίθετο, δηλ. είναι αδύνατον μία κριτική πάνω σε ένα 'Χ' φαινόμενο να είναι εσφαλμένη, αλλά ο τρόπος που το 'Χ' ερμηνεύθηκε να είναι σωστός. Μία σωστή κριτική παραπέμπει σε μία σωστή ερμηνεία, και μία λανθασμένη κριτική σε μία λανθασμένη ερμηνεία.

1^η ΕΡΜΗΝΕΙΑ &
ΚΡΙΤΙΚΗ ΤΗΣ
ΘΕΣΕΩΣ (2)

Ο τρόπος με τον οποίον φαίνεται να αντελήφθη ο Αριστοτέλης το θεώρημα του Ζήνωνος όσον αφορά την διανυσματική κίνηση ενός σώματος β μέσα σε ένα χώρο AB είναι η εξής: «Μία κίνηση πρέπει πάντοτε να συντελείται εντός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος. Το σώμα β ξεκινά από το σημείο A για το σημείο B. Επειδή όμως το β πρόκειται να αγγίξει άπειρα σημεία α_n, απαιτεί να του παραχωρηθεί ένα άπειρο διάστημα χρόνου. Και επειδή όλα στην ζωή περιορίζονται από τον χρόνο, όπως η ζωή μας η ίδια, γι' αυτό και το σώμα β δεν μπορεί να έχει τον απαιτούμενο άπειρο χρόνο που ζητάει, διότι και η ζωή του περιορίζεται από τον χρόνο. Άρα το σώμα β δεν μπορεί να φτάσει στο σημείο B, άρα η θέση (2) είναι σωστή, και κίνηση δεν υπάρχει».

Πάνω τώρα σ' αυτήν την ερμηνεία ο Αριστοτέλης άσκησε δριμεία κριτική, η οποία εμφανίζεται ως εξής (Άριστοτ. Φυσικής Άκρ. 233a22-31):

- i. Το επιχείρημα του Ζήνωνος οδηγείται σε λανθασμένο συμπέρασμα όταν ισχυρίζεται ότι είναι αδύνατον ένα σώμα β να διανύσει ένα χώρο AB, ή να αγγίξει άπειρα σημεία (ενν. ενδιάμεσων μέσων) του χώρου αυτού εντός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος.
- ii. Ο όρος 'άπειρον' έχει δύο ερμηνείες, (α) άλλοτε σημαίνει την επ' έπειρον και συνεχή διαιρετότητα ενός χώρου, και (β) άλλοτε πάλι σημαίνει το ανύπαρκτο σημείο αρχής και τέλους του χώρου αυτού (ενν. την απεραντοσύνη).
- iii. Ένα ον μπορεί να έρθει σε επαφή με άπειρα σημεία κάποιου άλλου όντος, αρκεί όμως να είναι 'άπειρα' σύμφωνα με την (iiα) ερμηνεία (δηλ. ο χώρος να είναι 'επ' άπειρον' διαιρετός). Αυτή η επαφή μπορεί να γίνει εντός συγκεκριμένου χρόνου, διότι και ο χρόνος επίσης είναι 'επ' άπειρον' διαιρετός.

Η κριτική αυτή του Αριστοτέλη βασίζεται στην εξής λογική: «Η διέλευση του β εντός του χώρου AB είναι δυνατή, παρά τα άπειρα ενδιάμεσα σημεία που πρέπει να διέλθει, διότι και γενικώς ο απαιτούμενος χρόνος T είναι επίσης κι αυτός απείρως διαιρούμενος. Συνεπώς όσα μικρά τμήμα χώρου α_n κι αν χρειαστεί το β να διανύσει, τόσα αντίστοιχα μικρά τμήματα τ_n υπάρχουν εντός του απαιτούμενου χρόνου T, οπότε η διέλευση υπό αυτή την έννοια είναι δυνατή». Ο Αριστοτέλης εννοεί πως το σώμα β μπορεί πράγματι να απαιτεί άπειρο χρόνο T για να διανύσει την απόσταση AB, κάτι που η ανθρώπινη ζωή δεν προσφέρει, όμως επειδή γενικώς ο χρόνος T υποδιαιρείται κι αυτός σε άπειρα μικρά τμήματα τ_n, τότε σε κάθε σημείο α_n του απείρου διανυσματικού χώρου AB θα αντιστοιχεί και ένα σημείο χρόνου τ_n του επίσης απείρως διαιρούμενου χρόνου T. Άρα το σώμα β δεν πρόκειται να στερηθεί τον απαιτούμενο χρόνο, ώστε να φτάσει στον τερματισμό του· μπορεί λοιπόν να τερματίσει στο σημείο B.

Η κριτική του Αριστοτέλη διενεργείται πάνω στην υπόθεση πως ο Ζήνων στο «ἐκ διχοτομίας» θεώρημα απέδειξε την ανυπαρξία κινήσεως συνδυάζοντας την κίνηση στον χώρο με την κίνηση στον χρόνο, και πως κατέληξε στο εσφαλμένο συμπέρασμα πως ο χώρος είναι απείρως διαιρούμενος, ενώ ο χρόνος είναι αδιαίρετος, άρα δεν μπορεί το σώμα β να κινηθεί εντός ενός απείρως διαιρούμενου χώρου και εντός ενός μη διαιρούμενου χρόνου. Γι' αυτό και ο Αριστοτέλης στην κριτική του προτείνει την απείρως διαιρετότητα του χρόνου, ώστε σε κάθε άπειρο σημείο α_n να αντιστοιχεί ένα άπειρο τ_n του χρόνου T . Δεν είναι όμως καθόλου σίγουρο ότι όντως ο Ζήνων έτσι ακριβώς διετύπωσε την ερμηνεία του θεωρήματός του, συνδυάζοντας δηλ. τον απείρως διαιρετό χώρο με τον αδιαίρετο χρόνο. Εξ άλλου η κριτική αυτή του Αριστοτέλη δημιουργεί ένα σοβαρό πρόβλημα, διότι ενώ με τον θεώρημα του Ζήνωνος το β πρέπει να διέλθει από άπειρα α_n σημεία χώρου, τώρα πρέπει να διέλθει και από άπειρα τ_n σημεία χρόνου T , πράγμα που καθιστά την διέλευση ακόμη πιο δύσκολη και αχανή. Προφανώς ο Αριστοτέλης είδε το αδιέξοδο στο οποίο οδηγείται το θεώρημα με την λύση που προτείνει, και πως αντί να επιλύεται ή να απλοποιείται, αυτό γίνεται ακόμη πιο δυσνόητο και δυσεπίλυτο, και γι' αυτό και λίγο πιο κάτω στο έργο του 'Φυσικά' ομολογεί πως «*Ἡ λύση που προτείναμε πιο πριν...*» δηλ. αυτή που αναφέρθηκε προηγουμένως «*...είναι επαρκής μόνο στην περίπτωση που κάποιος μας ρωτήσει αν ένα σώμα β μπορεί να διανύσει ένα τμήμα χώρου AB εντός ενός συγκεκριμένου χρόνου T. Ενώ όσον αφορά την ίδια την κίνηση από μόνη της η λύση αυτή δεν προσφέρει ικανοποιητική απάντηση*». Άρα παραδέχεται πως η κριτική που άσκησε στον θεώρημα του Ζήνωνος βασίστηκε στην υπόθεση πως ο Ζήνων συνδύασε την κίνηση στον διαιρούμενο χώρο με την κίνηση στον αδιαίρετο χρόνο χωρίς να είναι σίγουρος ότι έγινε έτσι. Και συνεχίζει: «*Αν λοιπόν κάποιος αδιαφορούσε για την κίνηση ενός σώματος β μέσα στον χώρο εντός συγκεκριμένου χρόνου, και ενδιαφερόταν για την κίνηση μόνο μέσα στον χρόνο, τότε η λύση που δώσαμε πιο πάνω δεν μπορεί να δώσει επαρκή απάντηση*» (Αριστ. Φυσικ. Ακρ. 263a15-22).

Ο ίδιος λοιπόν ο Αριστοτέλης ομολογεί ότι η λύση που πρότεινε οφείλεται σε ένα τρόπο ερμηνείας του θεωρήματος του Ζήνωνος, ο οποίος είναι πολύ προσωπικός και δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, γι' αυτό αναθεωρεί την προηγούμενη ερμηνεία του θεωρήματος αυτού και εισηγείται μία νέα, που είναι η ακόλουθη.

2^η ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΑ ΕΡ-
ΜΗΝΕΙΑΣ & ΚΡΙΤΙΚΗΣ
ΤΗΣ ΘΕΣΕΩΣ (2)

Η δεύτερη και διορθωτική προσπάθεια κριτικής του Αριστοτέλη προσφέρει μία νέα ερμηνεία στην θέση (2), είναι η εξής: «*Αν ένα σώμα β προκειμένου να διανύσει την απόσταση AB πρόκειται να έρθει σε επαφή με απείρως πολλά ενδιάμεσα α_n , τότε αυτό σημαίνει ότι στο διάστημα AB υπάρχουν άπειρα τέτοια σημεία. Όμως δεν μπορεί να υπάρχουν όντως στην πραγματικότητα άπειρα σημεία εντός ενός περιορισμένου χώρου AB*».

Αυτός είναι ο δεύτερος τρόπος ερμηνείας του θεωρήματος του Ζήνωνος, σύμφωνα με την οποίαν υποτίθεται ότι ο Ζήνων συνεπέρανε ότι 'το σώμα β καλείται να κινηθεί εντός μιας άπειρης διαδρομής AB, η οποία όμως υπάρχει εντός μιας περατότητας την οποίαν ορίζουν τα δύο ακραία σημεία A & B. Όμως δεν μπορεί το άπειρον να υπάρχει εντός μιας περατότητας, γι' αυτό δεν υπάρχει και η κίνηση εντός αυτού του χώρου'.

Η κριτική που ασκεί ο Αριστοτέλης στην νέα αυτή προσπάθεια ερμηνείας της θέσεως (2) είναι η ακόλουθη: «*Πρέπει να πούμε σ' όποιον μας ρωτήσει αν ένα σώμα β μπορεί να διέλθει άπειρα ενδιάμεσα σημεία – είτε εντός ενός χώρου AB, είτε εντός ενός χρόνου T – ότι αυτό και είναι και δεν είναι δυνατόν να συμβεί. Δηλ. δεν είναι δυνατόν να συμβεί, αν αυτά τα ενδιάμεσα σημεία υπάρχουν πραγματικά (έντελεχέια $\mu\Box$ γάρ ὄντα οὐκ ἐνδέχεται). Όμως είναι δυνατόν να συμβεί αυτό, μόνο αν αυτά τα ενδιάμεσα σημεία υπάρχουν δυναμικά (δυνάμει $\delta\Box$ ἐνδέχεται). Διότι όταν ένα σώμα κινείται συνεχώς (ὁ γάρ συνεχῶς κινούμενος) εντός ενός χώρου ή χρόνου συνεχούς, τότε περνά άπειρα σημεία, τα οποία υπάρχουν εντός του χώρου και του χρόνου κατά σύμβασιν (κατά συμβεβηκός), κι όχι στην πραγματικότητα. Διότι μόνο κατά σύμβασιν (συμβέβηκε γάρ) μπορεί να υπάρχουν σε μία ευθεία άπειρα ενδιάμεσα τμήματα, ενώ η πραγματικότητα και αυτό που υπάρχει, είναι κάτι τελείως διαφορετικό (ἢ δ' οὐσία ἐστὶν ἕτερα καὶ τὸ εἶναι), Αριστ. Φυσικά 263b3-9».*

Ο Αριστοτέλης διαφωνεί με το συμπέρασμα (2) του θεωρήματος του Ζήνωνος, και πιστεύει ότι ο Ζήνων οδηγήθηκε στην ανυπαρξία κινήσεως από την εσφαλμένη αντίληψη πως το σώμα β αγγίζοντας τα άπειρα α_n τα καθιστά υπαρκτά στην πραγματικότητα, οπότε όντας αυτά τα άπειρα α_n πραγματικά, όντως θα ήταν αδύνατον να τα αγγίξει όλα. Στην κριτική όμως που ασκεί διατυπώνει την άποψη πως το σώμα β 'αγγίζει' τα σημεία α_n χωρίς αυτά να αποκτούν πραγματικότητα ουσιαστική, αλλά μόνο 'δυναμική'. Συνεπώς επειδή τα άπειρα α_n υπάρχουν πλέον μόνο 'κατά σύμβασιν', γι' αυτό και η θέση (2) είναι ψευδής, οπότε η κίνηση και είναι δυνατή αλλά και υπάρχει.

Για να καταλάβουμε καλύτερα την κριτική του Αριστοτέλη, ας δούμε ένα υποθετικό παράδειγμα: δύο σώματα β & γ κινούνται με σκοπό να διανύσουν τον χώρο AB . Σύμφωνα με την λογική του Αριστοτέλη το σώμα β κινείται εντός αυτού του διαστήματος 'αγγίζοντας' τα σημεία α_n χωρίς όμως να σταματά σ' αυτά, οπότε μη σταματώντας τα καθιστά αυτομάτως υπαρκτά μόνο 'κατά σύμβασιν', κι όχι στην πραγματικότητα. Συνεπώς το σώμα β μπορεί κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις να διανύσει τον χώρο AB , οπότε η κίνηση είναι και δυνατή και υπαρκτή. Σύμφωνα όμως με την λογική του θεωρήματος του Ζήνωνος – όπως φυσικά το ερμηνεύει ο Αριστοτέλης – το σώμα γ κινείται στον χώρο AB 'σταματώντας' σε κάθε ένα α_n που συναντά, κι έτσι το σώμα γ καθιστά τα α_n υπαρκτά στην πραγματικότητα και ρεαλιστικά, οπότε η κίνηση καθίσταται πλέον αδύνατη. Η διαφωνία λοιπόν του Αριστοτέλη με το θεώρημα βρίσκεται στο γεγονός πως το σώμα β στην πορεία του προς το σημείο B 'αγγίζει' τα α_n , αλλά δεν σταματά σ' αυτά, οπότε δεν τους δίνει και ρεαλιστική πραγματικότητα.

Ένα σημείο όμως της κριτικής χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή. Ο Αριστοτέλης κατηγορεί και επικρίνει το θεώρημα του Ζήνωνος, διότι αυτό καθιστά όπως είδαμε τα σημεία α_n υπαρκτά με τρόπο ρεαλιστικό. Όμως για να αποκτήσουν τα α_n ρεαλιστική ύπαρξη μία μόνο προϋπόθεση απαιτείται, δηλ. πρέπει το σώμα που κινείται όχι απλώς να αγγίζει, αλλά να σταματά συγχρόνως σε όλα τα α_n , συνεπώς ο Αριστοτέλης – αν και δεν το λέει – θεωρεί ότι κατά τον Ζήνωνα το σώμα β στην πορεία του από το σημείο A στο σημείο B σταματά σε όλα τα α_n και τα καθιστά ρεαλιστικά υπαρκτά, και γι' αυτό ο Ζήνων κατέληξε στο συμπέρασμα πως δεν υπάρχει κίνηση. Είναι όμως μάλλον αδύνατον να είχε κάτι τέτοιο υπ' όψιν του ο Ζήνων όταν έλεγε ότι το β δεν μπορεί να τερματίσει στο σημείο B , διότι σταματά σε κάθε ένα από τα σημεία α_n . Η κριτική εν προκειμένω του Αριστοτέλη είναι εσφαλμένη, διότι στηρίζεται σε μία μάλλον αυθαίρετη ερμηνεία του θεωρήματος, η οποία δεν πρέπει να υπήρχε στο νου του Ζήνωνος.

3^η ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΑ ΕΡ-
ΜΗΝΕΙΑΣ & ΚΡΙΤΙΚΗΣ
ΤΗΣ ΘΕΣΕΩΣ (2)

Μία τρίτη κατά σειράν ερμηνεία του θεωρήματος του Ζήνωνος βασίζεται σε δύο προτάσεις, όπου η δεύτερη είναι συνέπεια της πρώτης, και είναι η ακόλουθη:

«i) Μία σειρά άπειρων ενεργειών και υποχρεώσεων εξ ορισμού δεν έχει τελευταία – καταληκτική δραστηριότητα. ii) Συνεπώς είναι αδύνατον να ολοκληρώσει κάποιος μια τέτοια σειρά δραστηριοτήτων, εκ των οποίων καμία δεν γίνεται 'τελευταία'». ».

Η λογική δηλ. του ερμηνεύματος αυτού είναι πως επειδή στην πορεία του β προς το σημείο A λείπει η τελευταία καταληκτική δραστηριότητα α_n-B , τότε αφού η ενέργεια του β είναι ανολοκλήρωτη, γι' αυτό δεν υπάρχει κίνηση.

Η πιο πάνω εξήγηση είναι φαινομενικά ορθή, ενώ στην βάση της είναι εσφαλμένη. Πράγματι δικαιούμαστε να ισχυριζόμαστε ότι η ολοκλήρωση μιας σειράς ενεργειών προϋποθέτει και την ύπαρξη μιας ενέργειας που θα είναι η τελευταία, και πως αν λείπει αυτή, τότε η ολοκλήρωση των ενεργειών δεν έχει συντελεσθεί. Όμως στην προκειμένη περίπτωση μία ερμηνεία της θέσεως (2) τους Ζήνωνος βασισμένη πάνω σ' αυτήν την εξήγηση είναι εσφαλμένη και στις δύο πιο πάνω προτάσεις i) & ii) ως ακολούθως: Η πρόταση i) συνιστά ένα λανθασμένο ερμηνέυμα της θέσεως (2) του Ζήνωνος, διότι απλούστατα στο θεώρημα του Ζήνωνος πουθενά δεν αναφέρεται ότι 'δεν υπάρχει κίνηση, διότι λείπει η διανυσματική κίνηση του τελευταίου τμήματος α_n-B , πως δηλ. το σώμα β έχει διέλθει από όλα τα ενδιάμεσα τμήματα και πως αυτό που λείπει η διάνυση του τελευταίου. Επίσης η πρόταση ii) συνιστά κι αυτή μία λανθασμένη ερμηνεία της θέσεως (2), διότι βασίζεται στην εντελώς εσφαλμένη λογική πως αν έχω ένα σύνολο ενεργειών Σ , τότε για να ολοκληρώσω το Σ θα πρέπει να γίνουν όλες οι πράξεις που αυτό το σύνολο περιλαμβάνει, και μια εξ αυτών να μείνει για το τέλος ως καταληκτική και τελευταία. Το λάθος αυτού του ερμηνεύματος βρίσκεται στο ότι πολλές πράξεις από το σύνολο Σ μπορεί να γίνουν ταυτόχρονα, ώστε να μην υπάρχει καμία τελευταία και καταληκτική.

4^η ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΑ ΕΡ-
ΜΗΝΕΙΑΣ & ΚΡΙΤΙΣΚΗ
ΤΗΣ ΘΕΣΕΩΣ (2)

Η τέταρτη προσπάθεια ερμηνείας της θέσεως (2) του θεώρηματος του Ζήνωνος λείται κι αυτή από δύο προτάσεις ως εξής: « i) *Αν κάποιος εκτελεί μία σειρά από ενέργειες, η εκτέλεση των πράξεων αυτών χαρακτηρίζεται από μία συγκεκριμένη εξελικτική πορεία. Δηλ. σταδιακά σημειώνω τις πράξεις που πρέπει να γίνουν μικραίνοντας συνεχώς τον αριθμό τους, έως ότου ολοκληρωθούν όλες.* ii) *Όμως όταν έχω να κάνω με μία σειρά από άπειρες πράξεις, τότε η πιο πάνω εξελικτική πορεία αποκλείεται, διότι όσες πράξεις κι αν έχω κάνει, υπολείπονται ακόμη πολλές για να γίνουν. Δηλ. όσα σημεία κι αν έχει διέλθει το σώμα β στην διαδρομή του από το Α στο Β, υπολείπονται ακόμη πολλά σημεία αν για να τα διανύσει, οπότε κίνηση δεν υπάρχει.*»

Η πρόταση ii) τους ερμηνεύματος είναι σωστή. Πράγματι αν το σώμα β έχει αγγίξει πολλά a_n σημεία, τότε αυτό έχει ακόμη απείρως πολλά τέτοια σημεία για να διανύσει. Γενικώς αν το σύνολο Σ διαθέτει απείρως πολλά στοιχεία, και το σύνολο Σ' είναι ένα υποσύνολο του Σ με ορισμένα στοιχεία, τότε Σ-Σ' θα παρουσιάσει τόσα πολλά στοιχεία, όσα έχει και το Σ. Όμως η πρόταση i) παρουσιάζει μικρή δυναμική στην πειστικότητά της. Διακηρύσσει την άποψη ότι η εξέλιξη μιας εκδηλώσεως διαδοχικών ενεργειών και πράξεων, πρέπει να εμφανίζει μία διαδοχική κλασματική διαίρεση αυτών των ενεργειών όλο και μεγαλύτερη.

Αυτό σημαίνει ότι αν έχω να κάνω μία εργασία που αποτελείται από δέκα ξεχωριστές δραστηριότητες, όταν κάνω την πρώτη, τότε σημειώνω ότι έχω κάνει το 1/10 της συνολικής εργασίας· αν κάνω και την δεύτερη, τότε έχω κάνει τα 2/10 της συνολικής εργασίας, και το κλάσμα της εργασίας μου θα μεγαλώνει, έως ότου γίνει 10/10 και εμφανιστεί πλήρως ολοκληρωμένο. Αν τώρα σκεφτεί κάποιος ότι υπάρχουν και εργασίες που δεν εμφανίζουν τέτοια κλασματική προοδευτική διαίρεση μιας εργασίας, μπορεί να έχει δίκιο, αλλά μέχρι ενός σημείου. Δηλ. όντως υπάρχει εργασία που φαίνεται να μην ακολουθεί αυτή την προοδευτική κλασματική διαίρεση, όπως για παράδειγμα αν αποφασίσω να σπάσω τα τζάμια τεσσάρων παραθύρων ενός αίθριου. Αντί να τα σπάζω ένα-ένα κάνοντας αυτήν την προοδευτική κλασματική διαίρεση της εργασίας μου, δηλ. 1/4, 2/4, 3/4, 4/4, μπορώ να βάλω μία βόμβα να εκραγεί και να σπάσουν όλα μαζί. Όμως ακόμη και σ' αυτήν την φαινομενικά αδιαίρετη κλασματικά εργασία μπορώ να αναζητήσω κλασματική προοδευτική διαίρεση του έργου μου, διότι όταν θα σκεφτώ να τα σπάσω έχω κάνει το 1/4 της εργασίας· όταν κατασκευάσω την βόμβα έχω κάνει τα 2/4· όταν την τοποθετήσω έχω κάνει τα 3/4· κι όταν εκραγεί έχω κάνει τα 4/4. Ομοίως λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι και το σώμα β παρουσιάζει μία τέτοια διαδοχική κλασματική διαίρεση του έργου του, έστω κι αν έχει άπειρες ενέργειες να κάνει με την λογική ότι ο χρόνος που απομένει όλο και λιγοστεύει. Η ιδέα της προοδευτικής εξελίξεως μιας εργασίας είναι φτιαγμένη έτσι, ώστε να προσαρμόζεται ακόμη και σε ενέργειες που παρουσιάζουν μία άπειρη σειρά δραστηριοτήτων.

ΤΙ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΣΗ-
ΜΑΙΝΕΙ Η ΘΕΣΗ (2)
ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ
ΤΟΥ ΖΗΝΩΝΟΣ;

Όσες προσπάθειες κι αν έχουν γίνει για να γίνει κατανοητό το θεώρημα του Ζήνωνος έχουν αποβεί μάταιες. Επίσης μάταιες έχουν αποβεί κι όλες οι προσπάθειες για έγκυρη απόρριψη του όλου συλλογισμού του, διότι ό,τι δεν μπορεί να γίνει πλήρως κατανοητό, δεν μπορεί και να απορριφθεί με πλήρη εγκυρότητα. Το μόνο που είναι σίγουρο είναι πως με το επιχείρημα αυτό η Ελεατική σχολή διεκήρυξε για μια ακόμη φορά ότι ο κόσμος που ζούμε είναι ψευδής, πως ό,τι βλέπουμε είναι απάτη των αισθήσεων, πως κίνηση δεν υπάρχει, όπως δεν υπάρχει και η πολυμορφία του κόσμου γύρω μας.

Θα τολμήσω να πω πως ο Ζήνων με το θεώρημά του αυτό διεκήρυξε όχι απλώς την ανυπαρξία κινήσεως, αλλά την εν γένει ανυπαρξία του κόσμου γύρω μας γενικώς. Δείτε για παράδειγμα τι προκύπτει ως συμπέρασμα από το «έκ δι-
χοτομίας» θεώρημα του Ζήνωνος. *Αν σε ένα φύλλο χαρτί τραβήξω μια γραμμή και στο ένα της άκρο βάλω το σημείο Α και στο άλλο άκρο βάλω το σημείο Β, αυτή η γραμμή αποτελείται από άπειρα ενδιάμεσα σημεία καθιστώντας την γραμμή ΑΒ ένα σύνολο Σ από άπειρα σημεία χ_ν. Το πρόβλημα που θέτει ο Ζήνων είναι το ακόλουθο: πώς μπορεί να υπάρχει ένα σύνολο άπειρων σημείων εντός μία περατότητας οριζομένης εκ των σημείων ΑΒ, ή ακόμη χειρότερα: πώς μπορεί να υπάρχει ένα σύνολο άπειρων σημείων εντός μια περατότητας ενός φύλλου χαρτιού; Για να το θέσουμε ακόμη πιο άγρια και επιθετικά: πώς γίνεται να υπάρχει το άπειρο εντός ενός καθορισμένου από σαφή όρια χώρου, από την στιγμή που άπειρον και περατότητα είναι έννοιες αντίθετες, αντιφατικές και αλληλοαποκλειόμενες;*

Το μεγάλο πρόβλημα που θέλει να καταδείξει με το θεώρημα αυτό ο Ζήνων είναι πως δεν είναι δυνατόν ούτε καν τα σημεία A και B να υφίστανται στον χώρο, διότι ένα σημείο καταλαμβάνει χώρο, ο χώρος διαιρείται δια δύο, οπότε το σημείο A είναι $A/2$, κι αυτό πάλι με την σειρά του είναι $A/4$ και ούτω καθ' εξής οδηγούμαστε πάλι στο άπειρον. Το βασικό και βασανιστικό λοιπόν πρόβλημα που έθεσε ο Ζήνων, και που δεν έχει φυσικά απαντηθεί ποτέ, είναι πώς μπορεί να εξηγηθεί λογική η απλή διαίρεση $\frac{1}{2}$, η οποία οδηγεί στο άπειρον. Αν η διαίρεση αυτή είναι υπαρκτή, τότε και το άπειρο στο οποίο μας οδηγεί είναι επίσης υπαρκτό. Όμως πώς γίνεται να υπάρχει το άπειρο εντός ενός κόσμου που περικλείεται από την περατότητα χώρου και χρόνου, όπως είναι ο δικός μας; Άρα ή η διαίρεση αυτή είναι λάθος, ή ο κόσμος που ζούμε δεν υπάρχει στην ουσία. Και επειδή δεν είναι δυνατόν να είναι η διαίρεση λάθος, άρα ο κόσμος που ζούμε είναι αυτός που δεν υπάρχει.