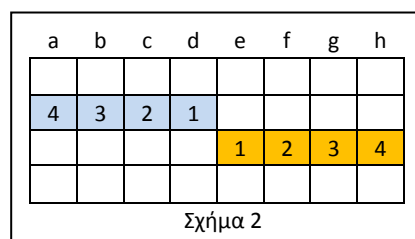
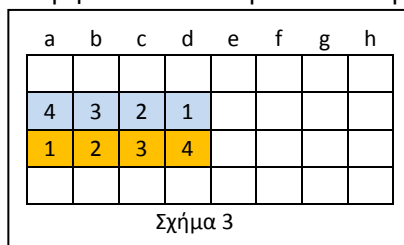


ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ 'Τοῦ Σταδίου' ΤΟΥ ΖΗΝΩΝΟΣ

Το συγκεκριμένο επιχείρημα του Ζήνωνος το διασώζει ο Αριστοτέλης στα 'Φυσικά', όπου του ασκεί κριτική. Η περιγραφή που κάνει είτε γιατί είναι αποσπασματική, είτε διότι έχει υποστεί παρεμβάσεις από αντιγραφείς που δεν κατάλαβαν ακριβώς το πνεύμα του επιχειρήματος, παρουσιάζει κάποια σοβαρά προβλήματα στην κατανόησή της. Γι' αυτό θεωρώ ως καλύτερο να ξεκινήσω με την παρουσίαση ενός παραδείγματος βασισμένου πάνω στην μαρτυρία του Αριστοτέλη, αλλά αρκετά τροποποιημένο προς το απλούστερον, ώστε ως αρχή να έχουμε μία ευκολότερη κατανόηση του όλου πνεύματος του Ζήωνα.

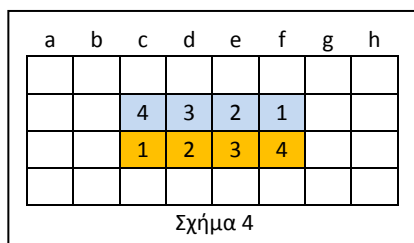
Φανταστείτε δύο σώματα A & B επιμήκη, αποτελούμενα από τέσσερα αδιαίρετα και αδιάσπαστα ισομεγέθη τμήματα του ενός μέτρου έκαστο (όπως 4 ίδια κουτιά, όπου το ένα είναι κολλημένο και πίσω από το άλλο), και συνολικό μήκος 4m το κάθε σώμα συνολικά (Σχήμα 1). Υποθέστε ότι A & B βρίσκονται σε διαφορετικούς διαδρόμους ενός σταδίου, και ότι η αρχή και των δυο σωμάτων A & B βρίσκεται αντικριστά στο σημείο ένωσης των d & e, πως δηλ. τα πρώτα τμήματα των δύο σωμάτων βρίσκονται στο ίδιο ακριβώς σημείο, ότι εφάπτονται (Σχήμα 2).

Θεωρήστε ότι το σώμα A θα παραμείνει ακίνητο στις θέσεις a-d, ενώ το σώμα B



πρόκειται να κινηθεί αριστερά προς το σημείο a με σταθερή ταχύτητα 1m/sec, που σημαίνει ότι το σώμα B θα έχει διασχίσει τα 4m για να φτάσει στο σημείο a εντός 4sec, και έτσι θα έχει ευθυγραμμιστεί με το σώμα A (Σχήμα 3). Όταν το σώμα B θα αρχίσει να κινείται προς το σημείο a, θα διασχίσει κατά μήκος όλο το σώμα A από το σημείο d έως το σημείο a, όπου και θα τερματίσει. Κι αυτό θα συμβεί εντός του φυσιολογικού και χρόνου των 4sec.

Υποθέστε τώρα πάντα με βάση το σχήμα 2 ότι τα δύο σώματα A & B κινούνται ταυτοχρόνως και τα δύο με την ίδια ταχύτητα 1m/sec., και το μεν σώμα A κατευθύνεται προς το σημείο f, όπου και θα τερματίσει, ενώ το σώμα B προς το



σημείο c, όπου θα σταματήσει και αυτό. Τότε και τα δύο σώματα θα έχουν ευθυγραμμιστεί μεταξύ των σημείων c-f (Σχήμα 4). Δύο πράγματα πρέπει εδώ να παρατηρήσουμε, εκ των οποίων το μεν πρώτο είναι απολύτως λογικό· δηλ. ότι ο χρόνος που θα χρειαστούν και τα δύο σώματα για να κάνουν την ταυτόχρονη αυτή πορεία τους θα είναι 2sec, διότι η απόσταση από d στο f για το A σώμα, όπως και η απόσταση από το e στο c για το σώμα B είναι ακριβώς ίδια, δηλ. 2m. Το δεύτερο όμως είναι εντελώς παράδοξο: όταν το τμήμα 1 του σώματος B θα ξεκινήσει

από το σημείο e για το σημείο c, θα συναντηθεί και θα διέλθει όλα τα τμήματα τους σώματος A, δηλ. τα 1,2,3 & 4. Αυτό όμως σημαίνει ότι το σώμα B ενώ ουσιαστικά θα έχει διανύσει μόνο 2m έως το σημείο c, συγχρόνως θα έχει περάσει και τα 4m του σώματος A το οποίο θα έχει διέλθει δίπλα του. Επίσης το επόμενο παράδοξο θα είναι πως ενώ το σώμα B χρειάστηκε 2sec για να διέλθει τα 2m από το e στο c, ταυτοχρόνως διήλθε εντός του ίδιου χρόνου των 2sec και τα 4m του σώματος A, διότι εκείνο εκείνη την στιγμή κινείτο προς την αντίθετη κατεύθυνση με την ίδια ταχύτητα προς το σημείο f. Αυτήν ακριβώς την εικόνα παρουσιάζει το θεώρημα του Ζήωνα, αν και στις λεπτομέρειές τους είναι λίγο διαφορετικό.

Αυτό που θέλει να δείξει με το παράδειγμα αυτό ο Ζήνων είναι πως η κίνηση δεν είναι ένα απόλυτο μέγεθος – όπως κανονικά θα έπρεπε να είναι – ούτε χώρου, αλλά ούτε και χρόνου. Την στιγμή που ένα σώμα q κινούμενο με σταθερή ταχύτητα g μπορεί, αλλά και του επιτρέπεται να παρουσιάζει δύο διαφορετικά αποτελέσματα και διανυσματικού χώρου, αλλά και διανυσματικού χρόνου, αυτό για τον Ζήωνα σημαίνει ότι η κίνηση λόγω αυτής της 'σχετικότητας' είναι ένα ψευδές φαινόμενο, μία απάτη των αισθήσεων, στην οποία κανείς δεν μπορεί να έχει καμία εμπιστοσύνη. Πράγματι το σώμα B εντός ενός σταθερού χρόνου T (2sec) παρουσιάζει δύο διαφορετικά διανυσματικά μεγέθη χώρου, καθώς διήλθε τόσο τα τέσσερα μέτρα του σώματος A, το οποίο κινείτο στην αντίθετη κατεύθυνση, αλλά και τα δύο μέτρα του χώρου d-c. Επίσης το σώμα B εντός ενός σταθερού χρόνου T (2sec) παρουσιάζει δύο διαφορετικά μεγέθη χρόνου,

διότι ενώ χρειάστηκε 2sec. για να πάει από το e στο c, εντός τους ιδίου χρόνου διήλθε μία απόσταση 4m του σώματος A, την οποίαν υπό άλλες συνθήκες θα χρειαζόταν 4sec.

Μπορούμε τώρα να κοιτάξουμε το επιχείρημα του Ζήνωνα, έτσι όπως το δίνει ο Αριστοτέλης, είναι το εξής:

- i. Το επιχείρημα αυτό αναφέρεται σε ισομεγέθη σώματα, τα οποία εντός ενός σταδίου κινούνται από αντίθετες κατευθύνσεις περνώντας εμπρός από επίσης ισομεγέθη σώματα· τα μεν ξεκινούν από το τέλος του σταδίου, ενώ τα δε από την μέση. Η ταχύτητά τους είναι ακριβώς ίδια, και σ' αυτήν την περίπτωση ο Ζήνων πιστεύει ότι ο μισός χρόνος είναι ίσος με τον διπλάσιο.

Τα 'ισομεγέθη σώματα' του κειμένου του Αριστοτέλη είναι τα πιο πάνω A & B. Το 'στάδιο' είναι οι δύο διαδρομοί στους οποίους κινούνται από αντίθετες όπως είδαμε κατευθύνσεις. Όταν το κείμενο αναφέρει πως 'τα μεν (το σώμα A) ξεκινούν από το τέλος του σταδίου, ενώ τα δε (το σώμα B) από την μέση', θέλει μ' αυτό να πει αυτό ακριβώς που δείξαμε πιο πάνω, δηλ. ότι το σώμα A με τα τέσσερα μέρη που το συνθέτουν ενώ ξεκινά από το ένα τέρμα του διαδρόμου, φτάνει μέχρι το μέσον της όλη αποστάσεως a-h, που είναι το σημείο d, και από εκεί ακριβώς ξεκινά το άλλο σώμα B. Η ταχύτητά τους είναι ακριβώς ίδια, η οποία βέβαια δεν αναφέρεται, αλλά όποια κι αν είναι δεν μεταβάλλει το αποτέλεσμα, γι' αυτό και δεν προσδιορίζεται. Όταν το κείμενο λέει πως για τον Ζήνωνα 'ο μισός χρόνος είναι ίσος με τον διπλάσιο' εννοεί αυτό που είδαμε πιο πάνω, πως δηλ. το σώμα B στην πορεία του από το e στο c διήλθε δύο χώρους και δύο χρόνους όλα διαφορετικά, διήλθε δηλ. δυο χώρους 2m & 4m συγχρόνως, και δύο χρόνους 2 & 4sec, άρα ο διπλάσιος χρόνος είναι ίδιος με τον μισό.

- ii. Το λάθος σ' αυτόν τον συλλογισμό βρίσκεται στην απαίτησή του πως ένα σώμα που κινείται με την ίδια ταχύτητα χρειάζεται τον ίδιο χρόνο για να προσπεράσει ένα κινούμενο σώμα κι ένα ακίνητο που έχουν το ίδιο μέγεθος. Αυτό όμως είναι λάθος
- iii. Για παράδειγμα ας δεχθούμε ότι ακίνητα είναι τα σώματα p· τα σώματα A να είναι εκείνα που καταλαμβάνουν τον χώρο από την μία αφετηρία έως την μέση των p, και να είναι ισάριθμα και ισομεγέθη μεταξύ τους· τα σώματα B να είναι εκείνα που ξεκινούν από το άλλο τέρμα, και να είναι ισάριθμα και ισομεγέθη με τα άλλα, και με την ίδια ταχύτητα με τα A.

a	b	c	d	e	f	g	h
		p	p	p	p		
4	3	2	1				
				1	2	3	4

Σχήμα 5

Στο παράδειγμα που Ζήνων εκτός από τα εν σειρά σώματα A & B υπάρχουν άλλα επίσης ισάριθμα και ισομεγέθη κι αυτά εν σειρά, τα οποία στο πιο πάνω παράδειγμα που δώσαμε εμείς δεν αναφέρθηκαν ως ξεχωριστά σώματα, γιατί ήταν χαρακτηρισμένα ως θέσεις c,d,e,f. Εδώ για χάρη τάξης μπορούμε να τους δώσουμε την ονομασία 'p,p,p,p', στις θέσεις c,d,e,f (Σχήμα 5).

- iv. Και τότε **θα συμβεί** το εξής: το πρώτο A και το πρώτο B θα βρίσκονται στο τελευταίο στάδιο του χρόνου καθώς θα προσπερνούν το ένα το άλλο.
- v. Και αμέσως μετά **θα συμβεί** το B να έχει περάσει όλα τα A, ενώ το A τα μισά p.
- vi. Συνεπώς ο χρόνος είναι ο μισός.

a	b	c	d	e	f	g	h
		p	p	p	p		
		4	3	2	1		
		1	2	3	4		

Σχήμα 6

Αυτό που εννοεί το κείμενο είναι πως τα 1 των A & B κινούμενα αντιθέτως και με την ίδια ταχύτητα, τότε στον ίδιο χρόνο θα βρίσκονται στο τέλος της διαδρομής τους, δηλ. στις θέσεις c & f, ή για να το πούμε όπως το λέει το κείμενο του Αριστοτέλη το ένα 1A στο ένα ακραίο p και το άλλο 1B στο άλλο ακραίο p, ενώ θα έχουν προσπεράσει το ένα το άλλο. Επίσης το 1B κινούμενο προς το c θα έχει περάσει και τα τέσσερα A, ενώ το A κινούμενο προς το f θα έχει βέβαια κι αυτό περάσει όλα τα B, αλλά μόνο τα δύο p, άρα συμπεραίνει πως ο χρόνος που ανα-

λογεί στο A είναι ο μισός σε σχέση μ' εκείνον που αναλογεί στο B, αλλά παρ' όλα αυτά είναι απολύτως ευθυγραμμισμένα. Αυτό που θέλει να πει εδώ το κείμενο του Αριστοτέλη είναι πως ενώ το σώμα B διήλθε τέσσερα μέτρα εντός 2sec, το σώμα A διήλθε δύο μέτρα πάλι σε χρόνο 2sec αντί για 4sec όπως θα έπρεπε. Έτσι βέβαια όπως το λέει δεν αφήνει και πολλά περιθώρια κατανόησης, γι' αυτό και πιο πάνω στην ερμηνεία που εγώ έδωσα και απλοποίησα το φαινόμενο, μίλησα για το γεγονός ότι το B συγχρόνως κινείται σε δύο χρόνους, ένας εκείνος των πραγματικών 2sec πηγαίνοντας από το e στο c, κι ένα ο πλασματικός καθώς προσπερνώντας τα τέσσερα A είναι σαν να έκανε χρόνο 4sec.

- vii. Διότι καθένα εκ των δυο βρίσκεται κατά μήκος του άλλου στον ίδιο χρόνο.

Στο παράδειγμα που δώσαμε τα 1A και 1B βρίσκονται αμέσως μετά από 2sec στα δύο αντίθετα άκρα.

viii. Και στον ίδιο χρόνο **θα συμβεί** ώστε το πρώτο A να έχει περάσει όλα τα B.

Όπως ακριβώς το πρώτο B (1B) πέρασε όλα τα A, έτσι και το πρώτο A (1A) εντός του ίδιου χρόνου των 2sec. πέρασε όλα τα B.

ix. Διότι την ίδια στιγμή το πρώτο A και το πρώτο B θα βρίσκονται στα αντίθετα άκρα της διαδρομής,

x. Καθώς και τα δύο χρειάζονται τον ίδιο χρόνο για να περάσουν εμπρός από τα p

xi. Αυτό είναι το επιχείρημα του Ζήνωνος, και βασίζεται σε μία λανθασμένη λογική.

Αυτή είναι η περιγραφή που κάνει ο Αριστοτέλης, σύμφωνα με την οποία έχουμε τρία σύνολα σωμάτων εντός ενός σταδίου, τα p τα A και τα B, τα οποία είναι ισομεγέθη μεταξύ τους. Το επιχείρημα δεν καθορίζει τον αριθμό των σωμάτων του κάθε συνόλου, μόνο που ορίζει να είναι μεταξύ τους ισάριθμα, και ούτε επίσης έχει κανένα καθοριστικό ρόλο ο αριθμός τους. Στο παράδειγμα που εγώ έδωσα στην αρχή χρησιμοποίησα τέσσερα σωματίδια σε κάθε σύνολο σωμάτων, για να γίνει πιο οφθαλμοφανές το επιχείρημα. Επίσης στην αφήγηση του Αριστοτέλη δεν ορίζεται αν τα σωματίδια των συνόλων των p, A & B θα πρέπει να βρίσκονται το ένα πίσω από το άλλο, όπως οι συρμοί ενός τραίνου, αλλά αυτό είναι αυτονόητο πως έτσι πρέπει να συμβαίνει. Ένα από τα τρία αυτά σύνολα σωμάτων, τα p, θα πρέπει είναι ακίνητο, ενώ τα A & B κινούμενα. Αυτά που θα οδηγούν την 'κούρσα' της διαδρομής τα ονομάσαμε ήδη ως 1A και ως 1B.

Με βάση όσα έχουμε δει και αναλύσει μέχρι στιγμής, μπορούμε να καταλήξουμε στα εξής δύο συμπεράσματα, στα οποία πρέπει να κατέληξε λογικά και ο Ζήνων:

- (1) Αν ένα σώμα a κινείται και προσπερνά κάποια άλλα σώματα F (δηλ. nF), και αν κάθε F έχει μήκος k μονάδες μήκους, τότε το σώμα a κινείται και προσπερνά nk σώματα.
- (2) Αν ένα σώμα a για μία διάρκεια χρόνου T, και με μία σταθερή ταχύτητα χρόνου j, και εντός του χρόνου T καλύπτει και προσπερνά m μονάδες μήκους, τότε $T=m/j$.

Αν τώρα μεταφέρουμε τις δύο αυτές προτάσεις στα σχήματα 5 & 6, και αντικαταστήσουμε το α με το 1B, τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το πέρασμα του 1B εμπρός από κάθε p είναι απαιτεί ένα χρόνο $T=2k/j$. Αντιθέτως το πέρασμα του 1B εμπρός από όλα τα 1A...4A απαιτεί χρόνο $T=4k/j$, παρά το γεγονός ότι p, A & B στον χρόνο $T=2k/j$ θα έχουν ευθυγραμμιστεί. Συνεπώς όταν μία κίνηση παρουσιάζει δύο χρόνους και δύο χώρους, τότε αυτή η κίνηση είναι ψευδής, οπότε κίνηση δεν υπάρχει.

Η διαφωνία του Αριστοτέλη με το επιχείρημα αυτό οφείλεται στην διαπίστωση πως ο Ζήνων φαίνεται να θέλει να αγνοεί πως τα p είναι ακίνητα, ενώ τα A & B κινούνται και μάλιστα με αντίθετη φορά. Η διαφωνία όμως αυτή του Αριστοτέλη είναι βασισμένη στην εμπειρική παρατήρηση, αλλά όπως όλοι γνωρίζουμε οτιδήποτε προβάλλεται και αποδεικνύεται με θεωρητικό τρόπο, τότε και με θεωρητικό τρόπο θα πρέπει να διαψευστεί ως λάθος. Άρα ο Αριστοτέλης για να καταρρίψει το θεώρημα του σταδίου θα έπρεπε να δοκιμάσει μία διάψευση βασισμένη πάνω σε θεωρητικά μοντέλα, δηλ. να απορρίψει ως ψευδείς τις θέσεις πιο πάνω (1) & (2). Από αυτήν την άποψη η διάψευση που επιχειρεί να κάνει – και όντως κάνει ο Αριστοτέλης στο θεώρημα αυτό – δεν μπορεί να γίνει αποδεκτή.

Μία ικανοποιητική απάντηση στον Ζήωνα θα μπορούσαμε να δώσουμε, αν την βασίζαμε πάνω σε μία αρχή, η οποία λέει τα εξής: «η κίνηση είναι μία δραστηριότητα 'σχετική', και δεν μπορεί να υπάρξει κίνηση χωρίς την έννοια της σχετικότητας. Συνεπώς αν πρόκειται να εξετάσουμε την έννοια της κινήσεως, τότε πρέπει να σκύψουμε πάνω όχι σε ένα πράγμα που κινείται, αλλά σε δύο. Δηλ. για να το πούμε κάπως διαφορετικά: αν στο σύμπαν υπήρχε μόνο ένα ον, τότε αυτό δεν θα μπορούσε να κινηθεί, διότι η όποια κίνησή του δεν θα μπορούσε να αποδειχθεί, αφού η έννοια της μετατόπισης γίνεται αναφορικά (δηλ. σε σχέση) με ένα είτε σταθερό, είτε κινητό σημείο». Άρα η 'κίνηση' είναι μία δραστηριότητα 'εν σχέσει' και όχι 'εν απολυτότητι'.

Αν όμως αποδεχθούμε έτσι άκριτα την 'σχετικότητα' της κινήσεως, τότε δύο εμπόδια εμφανίζονται εμπρός μας. Το πρώτο είναι πως δεν μπορούμε να συνταιριάσουμε την 'σχετικότητα' αυτήν με την 'απολυτότητα' της κινήσεως την ο-

ποίαν είχε εισαγάγει στην σκέψη του ο Νεύτων, για τον οποίον η κίνηση είναι ένα απόλυτο φαινόμενο, κι αν βρίσκεται 'εν σχέσει' με κάτι αυτό δεν είναι ένα οιοδήποτε άλλο κινητό ή ακίνητο σώμα, αλλά το ίδιο το σύμπαν. Το δεύτερο είναι πως στην καθημερινότητά μας χωρίς να το αντιλαμβανόμαστε αντιμετωπίζουμε την κίνηση ως κάτι 'απόλυτο'. Όταν δηλ. λέμε για κάτι ότι 'κινείται', το αναφέρουμε χωρίς καμία προσθήκη άλλου μεγέθους που να είναι 'εν σχέσει' με το κινούμενον. Λέμε δηλ. ότι 'το αυτοκίνητο κινείται', αλλά δεν προσθέτουμε πως 'το αυτοκίνητο κινείται 'εν σχέσει' με τα σπίτια που μένουν ακίνητα', ή κάποια άλλα αυτοκίνητα που κινούνται αντιθέτως ή είναι ακίνητα, αν και το εννοούμε. Με αυτήν την λογική πλέον μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε την πιο πάνω θέση (1) έτσι ώστε να 'χωρέσουν' την 'σχετικότητα' της κινήσεως:

(1*) *Αν ένα σώμα a κινείται και προσπερνά κάποια άλλα σώματα F (δηλ. nF), και αν κάθε F έχει μήκος k μονάδες μήκους, τότε σε σχέση με κάθε ένα F το σώμα a κινείται και προσπερνά nk σώματα.*

(2*) *Αν ένα σώμα a για μία διάρκεια χρόνου T , και με μία σταθερή ταχύτητα χρόνου j , και εντός του χρόνου T καλύπτει και προσπερνά m μονάδες μήκους, τότε $T=m/j$.*

Η παρατήρηση πως η κίνηση είναι πάντοτε 'εν σχέσει' με κάτι άλλο είτε σταθερό, είτε κινούμενο, είναι μια σοβαρή άποψη που μπορεί να αντιπαραταχθεί στο επιχείρημα του 'σταδίου' του Ζήνωνος. Θεωρώ όμως πως ο Ζήνων αποκλείεται να μην είχε προσέξει την σχετικότητα αυτήν· σίγουρα την είχε δει, αλλά εκ πεποιθήσεως την είχε αγνοήσει, διότι προφανώς κατά την γνώμη του η κίνηση πρέπει να είναι ένα φαινόμενο 'απόλυτο'. Αλλά δεν πρέπει να παραβλέπουμε ότι και στο θεώρημα του 'σταδίου' η κίνηση όπως την δίνει ο Ζήνων είναι ένα 'σχετικό' φαινόμενο, το οποίο όμως δίνει δύο διαφορετικές τιμές χώρου και χρόνου, και αυτό είναι κάτι που δεν θα έπρεπε κατά τον Ζήωνα να συμβαίνει.