

ΣΕΝΑΡΙΟ - ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+c$ με $a \neq 0$
στο Γυμνάσιο



Το κάτοπτρο στο οποίο οι ανακλώμενες ακτίνες συγκλίνουν σε κοινή εστία είναι παραβολή με τύπο $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. . .

Ταυτότητα

- ❖ **Τίτλος:** Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+c$ με $a \neq 0$ στο Γυμνάσιο.
- ❖ **Συγγραφέας:** Αρβανιτίδης Αθ. Συμεών, Μαθηματικός, sarvan@sch.gr
- ❖ **Γνωστική περιοχή των μαθηματικών:** Η συνάρτηση της παραβολής στην Γ' γυμνασίου.
 1. Δημιουργία της συνάρτησης $y=ax^2$ με εμφάνιση σημείων της τόσο στην επιφάνεια γραφικών όσο και σε πίνακα τιμών. Ένωση των διαδοχικών σημείων με ευθύγραμμα τμήματα και ταυτόχρονη πύκνωση τους με σκοπό την προσομοίωση και τελικά την εμφάνιση της γραφικής παράστασης.
 2. Η συνάρτηση $y=ax^2$ με $a \neq 0$ και μελέτη αυτής ως προς τα χαρακτηριστικά της. (κυρτότητα, ακρότατα, κορυφή, συμμετρίες)
 3. Μετατοπίσεις της $y=ax^2$ με $a \neq 0$ μεταβάλλοντας τον αριθμό $a \neq 0$ και μελέτη της καμπύλης ως προς την απόκλιση ή σύγκλισή της στον άξονα $y'y$.
 4. Η συνάρτηση $y=ax^2+bx+c$ με $a \neq 0$ προκύπτουσα με οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις της $y=ax^2$ με $a \neq 0$.
 5. Μελέτη της $y=ax^2+bx+c$ με $a \neq 0$ ως προς τα χαρακτηριστικά της.(κυρτότητα, ακρότατα, κορυφή, συμμετρίες).
- ❖ **Θέμα:** Το σενάριο αφορά στην μελέτη της συνάρτησης $y=ax^2$ με $a \neq 0$ ως προς την καμπυλότητα τη συμμετρία τις ακρότατες τιμές της και τον μετασχηματισμό της, μετά από μετατοπίσεις της, στην $y= ax^2+bx+c$ με $a \neq 0$. Γίνεται μελέτη αυτής ως προς τα χαρακτηριστικά της(κυρτότητα, ακρότατα, κορυφή, συμμετρίες) και κάνουμε αναζήτηση ακρότατων τιμών της.
- ❖ **Βασική ιδέα:** Η διδασκαλία της συγκεκριμένης ενότητας με παραδοσιακά μέσα (πίνακας, κιμωλία, χαρτί, μολύβι) είναι χρονοβόρα και παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες όσον αφορά την ακρίβεια. Τουναντίον, η διδασκαλία της με τη βοήθεια δυναμικών λογισμικών γίνεται πιο εύκολη, αφού τα δυναμικά λογισμικά παρέχουν στους μαθητές δυνατότητες κατασκευής πολλαπλών αναπαραστάσεων και δυναμικού χειρισμού των μαθηματικών αντικειμένων. Η χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας θα διευκολύνει τους μαθητές στο να **ανακαλύψουν** και να **κατανοήσουν** τη συμπεριφορά της συνάρτησης $y=ax^2$ ως προς την καμπυλότητα (**μεταβάλλοντας το a**), να **διερευνήσουν** τη συμμετρία της και την ακρότατη τιμή της .Θα ανακαλύψουν τη **μεταμόρφωσή της** στην $y=ax^2+bx+c$ μέσα από οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις της $y=ax^2$ με $a \neq 0$.
- ❖ **Τεχνολογικά εργαλεία:** Λογισμικό **CAS Geogebra**.

2. Σκεπτικό της δραστηριότητας

❖ Καινοτομίες.

Το προτεινόμενο εκπαιδευτικό σενάριο αποτελεί μια καινοτομία στο παραδοσιακό πλαίσιο διδασκαλίας της συγκεκριμένης ενότητας των μαθηματικών διότι εισάγει τα παρακάτω:

- ✓ Σύγχρονες εποικοδομητικές προσεγγίσεις εννοιών με δυναμικό τρόπο, απειρία μετασχηματισμών, πολλαπλές αναπαραστάσεις. Ο μαθητής έχει οπτικοποίηση κάθε μετατόπισης.
- ✓ **Ομαδοσυνεργατική δουλειά** για τη διαπραγμάτευση των απόψεων και τελικών συμπερασμάτων από τους μαθητές φιλοδοξώντας να αλλάξει την στάση των μαθητών στα μαθηματικά και στην διαδικασία προσέγγισης τους. Οι μαθητές αναμένεται να συνειδητοποιήσουν ότι τα μαθηματικά αποτελούν αντικείμενο διερεύνησης και μάλιστα ο κάθε μαθητής να μπορεί να δοκιμάζει στο πλαίσιο αυτό τις δικές του ιδέες και να καταλήγει στα δικά του συμπεράσματα τα οποία πρέπει να έχουν την κατάλληλη κοινωνική αποδοχή (στο πλαίσιο της τάξης) και επιστημονική τεκμηρίωση.
- ✓ **Φύλλα εργασίας** με προσεκτικά σχεδιασμένες ερωτήσεις

Σενάριο: Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+y$ με $a \neq 0$ στο Γυμνάσιο.

- ✓ **Καθηγητής** στο ρόλο του εξυπηρετητή της μάθησης του μαθητή μέσα από το σχεδιασμό κατάλληλων περιβαλλόντων μάθησης και όχι στο ρόλο του πομπού γνώσεων που συνήθως συμβαίνει στο περιβάλλον μιας παραδοσιακής τάξης. Η διδασκαλία μπορεί να γίνει διαφορετική δίνοντας έμφαση σε διαδικασίες που επιτρέπουν την πειραματική προσέγγιση της γνώσης κάνοντας τον ίδιο τον μαθητή ερευνητή μετέχοντας με τον ίδιο τον δάσκαλο σε μια διαδικασία ενεργούς έρευνας η οποία προάγει την αποτελεσματική διδασκαλία και βελτιώνει την μάθηση. Ο δάσκαλος λειτουργεί σε ένα σύνθετο περιβάλλον μεταξύ διδασκαλίας τεχνολογίας και ανθρώπινων σχέσεων.

❖ Προστιθέμενη αξία.

Το σενάριο αναδεικνύει συγκεκριμένες δράσεις οι οποίες δεν μπορούν να υλοποιηθούν με τα συμβατικά αναπαραστατικά μέσα (βιβλίο – τετράδιο - μολύβι) ενώ συγχρόνως επεκτείνουν τους γνωστικούς ορίζοντες του χρήστη. Συγκεκριμένα οι μαθητές καλούνται:

- ✓ Εμφανίζοντας σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, και αυξάνοντας την πυκνότητα τους με ταυτόχρονη ένωση τους με διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα μπορούν οι μαθητές να κάνουν **εικασίες** για την μορφή που θα έχει η γραφική παράσταση, να πετύχουν όσο το δυνατόν εφικτό **προσομοίωση της** και στο τέλος να την εμφανίσουν.
- ✓ **Μεταβάλλοντας δυναμικά τον συντελεστή a να ανακαλύψουν** και να **κατανοήσουν** τη συμπεριφορά της συνάρτησης $y=ax^2$ ως προς την καμπυλότητα και την απόκλιση ή σύγκλιση της με τον άξονα $y'y$.
- ✓ Να **διερευνήσουν** τη συμμετρία της και την ακρότατη τιμή της $y=ax^2$ με $a \neq 0$ για τις άπειρες θεωρητικά τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός a .
- ✓ Θα ανακαλύψουν τη **μεταμόρφωσή της $y=ax^2$ με $a \neq 0$ στην $y=ax^2+bx+y$ μέσα από δυναμικές πολλαπλές μετατοπίσεις** οριζόντιες και κατακόρυφες που οι ίδιοι θα κάνουν.
- ✓ Να **πειραματιστούν** με τις μετατοπίσεις και να μελετήσουν τη $y=ax^2+bx+y$ με $a \neq 0$ ως προς τα χαρακτηριστικά της. (κυρτότητα, ακρότατα, κορυφή, συμμετρίες)

❖ Γνωστικά – διδακτικά προβλήματα

Η παραδοσιακή διδασκαλία της συνάρτησης $y=ax^2+bx+y$ με $a \neq 0$. με βάση το σχολικό βιβλίο, στηρίζεται στον αλγεβρικό μετασχηματισμό του τριωνύμου ώστε να έρθει στη μορφή

$$ax^2+bx+y = a \left(x + \frac{\beta}{2a} \right)^2 - \frac{\beta^2 - 4a\gamma}{4a}. \quad \text{Η μορφή αυτή μας αποκαλύπτει κατά κάποιον τρόπο}$$

τις απαραίτητες μεταφορές $y=ax^2$. Επίσης ο **μικρός αριθμός στατικών εικόνων**, για να δείξει το αποτέλεσμα των μεταφορών και την κατασκευή της γραφικής παράστασης, **απαιτούν ιδιαίτερες νοητικές και αφαιρετικές δεξιότητες**, καθώς **δεν διαθέτουν διαδραστικά χαρακτηριστικά** δηλαδή δεν αντιδρούν στις ενέργειες του μαθητή. Η **μετωπική διδασκαλία** επίσης **δεν προσφέρεται** ούτε **από άποψη ακρίβειας** ούτε **από άποψη εξοικονόμησης χρόνου** για μετασχηματισμούς παραμετροποιήσεις και άμεσα αποτελέσματα. Με το σενάριο αυτό και τη χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας οι μαθητές θα κάνουν **μόνοι** τους τις μεταφορές της βασικής συνάρτησης $y=ax^2$.

Θα πειραματιστούν και **θα διερευνήσουν** τους μετασχηματισμούς που υφίσταται η γραφική παράσταση. όταν μεταβάλλεται ο συντελεστής a . Αυτό έχει ιδιαίτερη διδακτική αξία, διότι στη συνήθη πρακτική ο μετασχηματισμός είναι η κατάληξη και όχι η αφετηρία της διερεύνησης μιας συνάρτησης.

3. Πλαίσιο εφαρμογής

❖ Σε ποιους απευθύνεται.

Το σενάριο απευθύνεται σε μαθητές Γ΄ Γυμνασίου. Με κάποιες επεκτάσεις μπορεί να απευθυνθεί και σε μαθητές Α΄ Λυκείου.

❖ Χρόνος υλοποίησης.

Σενάριο: Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+c$ με $a \neq 0$ στο Γυμνάσιο.

Η υλοποίηση απαιτεί 4 διδακτικές ώρες περίπου.

❖ Χώρος υλοποίησης.

Το σενάριο προτείνεται να υλοποιηθεί εξ' ολοκλήρου στο εργαστήριο της πληροφορικής.

❖ Προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών.

Από την πλευρά του μαθητή:

Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν :

- 1.Καρτεσιανό Σύστημα συντεταγμένων
- 2.Συντεταγμένες σημείου – απεικόνιση σημείου.
- 3.Συνάρτηση – γραφική παράσταση.
- 4.Αξονική –κεντρική συμμετρία
- 5.Δευτεροβάθμια εξίσωση (τύπους διακρίνουσας και ριζών)
- 6.Απαιτείται βασική εξοικείωση με την χρήση του εκπαιδευτικού λογισμικού **Geogebra**.

Από την πλευρά του καθηγητή:

Ο διδάσκων θα πρέπει να γνωρίζει τον τρόπο χρήσης των εργαλείων του λογισμικού **Geogebra**.

❖ Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία.

- ✓ τετράδιο για να κρατούν σημειώσεις για την πορεία της διερεύνησης και να καταγράφουν τα συμπεράσματά τους και να εκτελούν τις αλγεβρικές διαδικασίες όπου χρειάζονται.
- ✓ Βιβλίο για να ανατρέχουν σε προηγούμενες έννοιες.
- ✓ Φύλλα εργασίας τα οποία δίνονται από τον διδάσκοντα και έχουν ως στόχο να καθοδηγούν τους μαθητές στη διερεύνηση των διαφόρων ερωτημάτων και τις κατασκευές.
- ✓ Γεωμετρικά όργανα (αν χρειάζονται) για κατασκευές στο τετράδιο.

Πριν την διεξαγωγή της δραστηριότητας ο διδάσκων μπορεί, μέσω απλών δραστηριοτήτων, να συζητήσει με τους μαθητές για τις βασικές λειτουργίες του λογισμικού αλλά και τις μαθηματικές έννοιες που απαιτούνται ως υπόβαθρο για την διεξαγωγή της.

❖ Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης.

Οι μαθητές:

- ✓ Θα εργαστούν σε ομάδες των 3 ατόμων σε κάθε Η/Υ (ομαδοσυνεργατική μάθηση).
- ✓ Η σύνθεση κάθε ομάδας είναι ανομοιογενής ως προς την επίδοση στο συγκεκριμένο μάθημα, τις διαπροσωπικές σχέσεις των μαθητών, την κοινωνική προέλευση των μαθητών και τη δυσκολία με την οποία εκδηλώνονται απέναντι σε καθηγητή, συμμαθητές.
- ✓ Ο ένας χειρίζεται την εφαρμογή, ο δεύτερος υπαγορεύει τις οδηγίες-ερωτήσεις του φύλλου εργασίας και ο τρίτος παρακολουθεί τη σωστή εφαρμογή τους, όλοι μαζί συζητούν, αποφασίζουν και διατυπώνουν τις απαντήσεις. Φυσικά οι ρόλοι αυτοί μπορούν να εναλλάσσονται.
- ✓ Θα συμπληρώσουν ένα κοινό φύλλο εργασίας που περιέχει ερωτήσεις σχετικές με το θέμα. Μπορεί το φύλλο εργασίας να αφήνει μια σχετική ελευθερία στους μαθητές ώστε να θέτουν τα δικά τους ερωτήματα και να απαντούν σ' αυτά.

Ο εκπαιδευτικός:

- ✓ να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών,
- ✓ να συνεργάζεται μαζί τους, να τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους
- ✓ να τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση.

Σενάριο: Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+c$ με $a \neq 0$ στο Γυμνάσιο.

Ο **καθηγητής** αναλαμβάνει το ρόλο του **συνερευνητή** και του βοηθού των προσπαθειών των μαθητών. Απευθύνεται άλλοτε σε όλες τις ομάδες και άλλοτε σε κάθε ομάδα ξεχωριστά, εξειδικεύοντας τις παρεμβάσεις του ανάλογα με τις ανάγκες που προκύπτουν κατά τη διαδικασία της διερεύνησης. Ο καθηγητής θα πρέπει να κάνει ερωτήσεις κατάλληλες που να ενθαρρύνουν τον πειραματισμό, αφήνοντας στους μαθητές την πρωτοβουλία των κινήσεων και περιθώρια για συζήτηση και ανταλλαγή απόψεων.

Τα τεχνολογικά εργαλεία:

Θα πρέπει να δίνουν τη δυνατότητα άμεσης αλληλεπίδρασης του μαθητή με την εφαρμογή ώστε να μετασχηματίζει και να δημιουργεί κατασκευές, να υποθέτει, να επαληθεύει τις υποθέσεις του, να κάνει μετρήσεις κλπ.

❖ Στόχοι της δραστηριότητας.

Από την πλευρά του γνωστικού αντικείμενου:

Οι δραστηριότητες του σεναρίου έχουν ως στόχο τη σύνδεση και κατανόηση, μέσω πειραματισμών, βασικών μαθηματικών εννοιών. Σκοπός των διαφορετικών προσεγγίσεων με τη βοήθεια του λογισμικού είναι μεταξύ άλλων και:

- ✓ Να **διακρίνουν** τις **συμμετρίες** την **καμπυλότητα** και τα **ακρότατα** της παραβολής $y=ax^2$ **ανάλογα με το πρόσημο του αριθμού a .**
- ✓ Να **μπορούν** να **διακρίνουν** αν η παραβολή $y=ax^2$ **συγκλίνει ή αποκλίνει** από τον άξονα $y'y$ **ανάλογα με τις αυξομειώσεις του αριθμού a .**
- ✓ Να **κατανοήσουν** ότι η συνάρτηση του τριωνύμου $y=ax^2+bx+c$ **προκύπτει από οριζόντια και κατόπιν κατακόρυφη μετατόπιση της $y=ax^2$.**
- ✓ Βλέποντας τον τύπο της συνάρτησης του τριωνύμου $y=ax^2+bx+c$ να **μπορούν** να **διακρίνουν** αν παρουσιάζει **μέγιστο ή ελάχιστο** (ανάλογα με το πρόσημο του αριθμού a). Ποια είναι η τιμή του ακρότατου και για ποια τιμή του x λαμβάνεται. Ποια είναι η κορυφή της παραβολής. ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας της παραβολής.

Από την παιδαγωγική πλευρά:

- ✓ Να μάθουν να πειραματίζονται με τις περιεχόμενες έννοιες και να βρίσκουν τις σχέσεις που τις συνδέουν.
- ✓ Να τους δοθεί η ευκαιρία να οργανώσουν τα δεδομένα τους από τον πειραματισμό, ώστε να διευκολυνθούν στην εξαγωγή συμπερασμάτων.
- ✓ Να μάθουν να συνεργάζονται με τα άλλα μέλη της ομάδας για να συζητήσουν τις παρατηρήσεις τους, να οργανώσουν τα συμπεράσματά τους, να διατυπώσουν κανόνες, να καταχωρίσουν τα δεδομένα τους, να κατασκευάσουν σχέσεις που συνδέουν μεγέθη, να παρουσιάσουν την εργασία τους στις άλλες ομάδες.
- ✓ Να οικοδομήσουν κώδικες επικοινωνίας ώστε να γίνονται αντιληπτοί από τα άλλα μέλη της ομάδας, από όλους τους συμμαθητές τους και από τον καθηγητή τους.

4. Ανάλυση του σεναρίου.

❖ Η περιγραφή των επιμέρους δραστηριοτήτων:

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Η περιγραφή των επιμέρους δραστηριοτήτων (Ροή εφαρμογής):

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1^η

Το πρόβλημα ΕΚΚΡΕΜΟΥΣ. Μια ευκαιρία για εφόρμηση των μαθητών και μια πρώτη προσέγγιση των εννοιών.

Προκειμένου να παροτρύνουμε τους μαθητές σε προβληματισμό και να κερδίσουμε το ενδιαφέρον τους, κάνουμε μια εισαγωγή στην έννοια της παραβολής με ένα πρόβλημα.

Σενάριο: Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+c$ με $a \neq 0$ στο Γυμνάσιο.

Στο αρχείο (EKPEMEΣ ggb) δίνεται ένα εκκρεμές ρολογιού που βρίσκεται στον άξονα $\psi' \psi$ ορθοκανονικού συστήματος αξόνων. Η σφαίρα του εκκρεμούς και η θέση της παριστάνεται από ντο σημείο $K(t-4, \frac{1}{8}(t-4)^2)$ που είναι παραμετρικό σημείο σε σχέση με τον χρόνο t sec. Η παράμετρος t παίρνει τιμές από έναν δρομέα. Καλούμε τους μαθητές να βρουν την αρχική θέση της βάρκας (συντεταγμένες του σημείου B) πριν την κίνηση της ($t=0$) προκειμένου να διερευνήσουν πως επηρεάζει ο χρόνος παράμετρος t την θέση της. Κατόπιν ζητούμε να θέσουν όπου $t-8=x$ και $\frac{1}{8}(t-4)^2=y$ και να βρουν την σχέση που συνδέει τις παραπάνω συντεταγμένες, να δημιουργήσουν δηλ την ισότητα $y=\frac{1}{8}x^2$. Καλούμε τους μαθητές να πατήσουν το κουμπί κίνηση βάρκας για να κάνουν μια εικασία για το τι μορφή (ευθεία ή καμπύλη) έχει η γραφική παράσταση, δηλ η ένωση όλων των σημείων, ιχνών που προκύπτουν από την $y=\frac{1}{8}x^2$. Κατόπιν δίνουμε την εντολή να γίνει η προσέγγιση της γραφικής παράστασης της τροχιάς εμφανίζοντας διαδοχικά 5 ίχνη σημεία της και ένωση αυτών και μετά 9 σημείων και ένωση αυτών πατώντας τα αντίστοιχα κουμπιά. Στο τέλος ζητούμε να πατήσουν το κουμπί εμφάνισης της γραφικής παράστασης της τροχιάς και να ελέγξουν αν η σχέση $y=\frac{1}{8}x^2$ είναι συνάρτηση πατώντας το κουμπί (κίνηση κατακόρυφης ευθείας). Στο σημείο αυτό οι μαθητές με κατάλληλες ερωτήσεις βγάζουν κάποια αρχικά συμπεράσματα για την συνάρτηση πλέον $y=\frac{1}{8}x^2$. Διευκρινίζοντας το ότι το $\frac{1}{8} > 0$. Για την υλοποίηση της 1ης δραστηριότητας δόθηκε το (φύλλο εργασίας 1).

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2^η

Πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης $y=ax^2$ παίρνοντας διαφορετικές τιμές της παραμέτρου a και εξαγωγή συμπερασμάτων όσον αφορά τις συμμετρίες, κυρτότητα και ακρότατα της παραπάνω συνάρτησης.

Στο αρχείο (μεταβολέας a - συμμετρίες ggb) δίνεται η συνάρτηση $y=ax^2$ και ένας δρομέας a που μεταβάλλει τις τιμές του a .

Καλούνται οι μαθητές να κάνουν τις παρακάτω ενέργειες:

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 1^η Να μεταβάλουν τις τιμές του δρομέα a και να καταλάβουν πότε η συνάρτηση $y=ax^2$ είναι κυρτή ή κοίλη ανάλογα με το πρόσημο του a

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 2^η Να δώσουν μόνο θετικές τιμές στο δρομέα a και αυξάνοντας ή μειώνοντας αυτές τις τιμές να καταλάβουν πότε η συνάρτηση $y=ax^2$ συγκλίνει ή αποκλίνει από τον άξονα $\psi' \psi$ σε σχέση πάντα με τις παραπάνω αυξομειώσεις του αριθμού a

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 3^η Να δώσουν μόνο αρνητικές τιμές στο δρομέα a και αυξάνοντας ή μειώνοντας αυτές τις τιμές να καταλάβουν πότε η συνάρτηση $y=ax^2$ συγκλίνει ή αποκλίνει από τον άξονα $\psi' \psi$ σε σχέση πάντα με τις παραπάνω αυξομειώσεις του αριθμού a

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 4^η Για να ελέγξετε την ορθότητα των παραπάνω απαντήσεων τους καλούμε τους μαθητές να δώσουν αυτόματη κίνηση στον δρομέα a κάνοντας αριστερό κλικ πάνω στο κουτί Αυτόματη κίνηση δρομέα a . Στην επιφάνεια γραφικών βλέπουμε τα ίχνη που αφήνει η γραφική παράσταση της f οπότε και τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της όταν ο αριθμός a μεταβάλλεται.

Σενάριο: Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+c$ με $a \neq 0$ στο Γυμνάσιο.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 5^η, 6^η Να δώσουν μόνο θετικές τιμές στον δρομέα a , να εμφανίσουν σημείο $A(x,y)$ της γραφικής παράστασης κάνοντας αριστερό κλικ πάνω στο κουτί εμφάνιση / απόκρυψη του σημείου A και να δώσουν κίνηση στο σημείο A με την βοήθεια του δρομέα κίνησης κ. Ταυτόχρονα εμφανίζεται και ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης. Παρατηρώντας οι μαθητές τις μεταβολές της τεταγμένης y του κινούμενου σημείου A και τον πίνακα τιμών τους καλούμε να εξετάσουν από ποιόν αριθμό είναι μεγαλύτερες αυτές ώστε να κατανοήσουν την έννοια του μεγίστου της συνάρτησης και του πότε αυτό λαμβάνεται.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 7^η Να δώσουν μόνο αρνητικές τιμές στον δρομέα a , και να δώσουν κίνηση στο σημείο A με την βοήθεια του δρομέα κίνησης κ. Παρατηρώντας οι μαθητές τις μεταβολές της τεταγμένης y του κινούμενου σημείου A και τον πίνακα τιμών καλούμε να εξετάσουν από ποιόν αριθμό είναι μικρότερες αυτές ώστε να κατανοήσουν την έννοια του ελαχίστου της συνάρτησης και του πότε αυτό λαμβάνεται. Στο σημείο αυτό δίνουμε και τον ορισμό της κορυφής

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 8^η 9^η Να κάνουν αριστερό κλικ στο κουτί Συμμετρικά σημεία ως προς $y'y'$ και να δώσουν κίνηση στο σημείο A. Εμφανίζεται ένα κινούμενο διάνυσμα που δείχνει την διαδικασία εύρεσης συμμετρικού σημείου A' του κινούμενου σημείου A της f ως προς τον άξονα $\psi'\psi$. Να τσεκάρουν το κουτί Συμμετρική γραφική παράσταση ως προς $y'y'$ και να εμφανίσουν τη συμμετρική γραφική παράσταση g ως προς $\psi'\psi$ της f , προκειμένου να κατανοήσουν ότι ο άξονας $\psi'\psi$ είναι άξονας συμμετρίας

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 9^η 10^η Να τσεκάρουν το κουτί Συμμετρικά σημεία ως προς $x'x'$ και παρακολουθήσουν το κινούμενο διάνυσμα που δείχνει την κατασκευή του συμμετρικού τυχαίου σημείου A της f ως προς $x'x'$. Με τον δρομέα κ κουνώντας τον σε όλη την διαδρομή του δημιουργούνται τα ίχνη των συμμετρικών των σημείων A ως προς $x'x'$.

Να τσεκάρουν το κουτί Συμμετρική γραφική παράσταση ως προς $x'x'$ προκειμένου να **εικαστούν** πρώτα και κατόπιν να επιβεβαιώσουν την μορφή της εξίσωσης που έχει η συμμετρική της f ως προς άξονα $x'x'$.
Για την υλοποίηση της 2^{ης} δραστηριότητας δόθηκε το [φύλλο εργασίας 2](#).

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3^η

Θα κάνουμε μια πρώτη προσέγγιση των μετατοπίσεων οριζόντιας και κατακόρυφης της απλής συνάρτησης $f(x)=x^2$ προκειμένου ο μαθητής να κατανοήσει τις μεταβολές στον τύπο της f στην κορυφή της και στον άξονα συμμετρίας. Τέλος θα επιχειρήσουμε να αποδείξουμε ότι συνάρτηση του τριωνύμου είναι αποτέλεσμα των παραπάνω μετατοπίσεων.

Στο αρχείο [\(3_ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ ΤΗΣ \$Y=X^2\$.ggb\)](#) δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2$
Καλούνται οι μαθητές να κάνουν τις παρακάτω ενέργειες:



ΕΝΕΡΓΕΙΑ 1^η 2^η Να κάνουν κλικ πάνω στο κουτί και κατόπιν με το πληκτρολόγιο να δώσουν μια θετική και μια αρνητική τιμή στο κουτί

Σενάριο: Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+c$ με $a \neq 0$ στο Γυμνάσιο.

Δώστε τιμή για οριζόντια μετατόπιση

και να τσεκάρουν το κουτί

Δείτε την οριζόντια μετατόπιση κατά την τιμή που δώσατε

Στόχος είναι να παρατηρήσουν οι μαθητές πως μεταβάλλεται ο τύπος της f και στο αν η μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f στον άξονα $x'x$ γίνεται αριστερά η δεξιά από τον άξονα $\psi'\psi$. Επίσης να βγάλουν συμπεράσματα για την κορυφή της παραβολής και τον άξονα συμμετρίας της. Μπορούν να επαναλάβουν την παραπάνω διαδικασία για περισσότερες από μια θετικές η αρνητικές τιμές μετατόπισης

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 3^η, 4^η Πατούνε το κουτί

και Κάνουν αριστερό κλικ πάνω στο κουτί

και κατόπιν με το πληκτρολόγιο

δίνουν μια **θετική** η **μία αρνητική** τιμή στο κουτί:

Δώστε τιμή για κατακόρυφη μετατόπιση

και τσεκάρουν το κου-

Δείτε την κατακόρυφη μετατόπιση κατά την τιμή που δώσατε

Στόχος είναι να δουν οι μαθητές πως μεταβάλλεται ο τύπος της f και στο αν η μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f στον άξονα $\psi'\psi$ γίνεται πάνω από τον άξονα $x'x$ η κάτω από τον άξονα $x'x$. Επίσης να βγάλουν συμπεράσματα για την κορυφή της παραβολής και τον άξονα

συμμετρίας της. Πατώντας το κουτί μπορείτε να επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία για περισσότερες απο μια **θετικές η αρνητικές τιμές** τιμές μετατόπισης

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 5^η, 6^η Πατούνε το κουτί

και κάνουν αριστερό κλικ πάνω στο κουτί

κατόπιν με το πληκτρολόγιο

δίνουν μια **αρνητική ή θετική** τιμή στο κουτί: Δώστε τιμή για οριζόντια μετατόπιση και τσεκάρουν το κουτί Δείτε την οριζόντια μετατόπιση κατά την τιμή που δώσατε τέλος δίνουν μια **αρνη-**

τική ή θετική τιμή στο κουτί: Δώστε τιμή για κατακόρυφη μετατόπιση και τσεκάρουν το

Δείτε την ταυτόχρονη μετατόπιση

κουτί και τσεκάρετε το κουτί:

Εμφάνισε την συνάρτηση του τριωνύμου

Παρατηρούν πως μεταβάλλεται ο τύπος της f καθώς

και τον τύπο του τριωνύμου που προκύπτει Πατώντας το κουτί μπορείτε να επαναλάβουν την παραπάνω διαδικασία . Στόχος είναι ο εντοπισμός της κορυφής και του άξονα συμμετρίας της τελικής μετατοπισμένης συνάρτησης και η κατανόηση ότι το τριώνυμο προκύπτει από δύο μετατοπίσεις συνάρτησης $f(x)=x^2$.

Για την υλοποίηση της 3^{ης} δραστηριότητας δόθηκε το [φύλλο εργασίας 3](#).

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4^η

Μετατοπίσεις της $y(x)=ax^2$ και η συνάρτηση τριώνυμο

Στο αρχείο(4_ τριώνυμο ggb) η επιφάνεια των γραφικών παρουσιάζει την γραφική παράσταση της συνάρτησης τριωνύμου $s(x)=ax^2+bx+c$ με τους συντελεστές της a, b, c να μεταβάλλονται με την βοήθεια 3 δρομέων

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 1^η Κάνουμε αριστερό κλικ πάνω στους δρομείς a, b, c και σύροντας τους δίνουμε τιμές στους συντελεστές a, b, c με $a \neq 0$ και παρατηρούμε τις πολλαπλές αναπαραστάσεις που παίρνει η γραφική παράσταση της s και τις αλλαγές στον τύπο αυτής. Δίνουμε στον δρομέα a πρώτα θετικές τιμές και μετά αρνητικές τιμές. Προκειμένου να καταλάβουν οι μαθητές πότε η συνάρτηση τριώνυμο είναι κυρτή και πότε κοίλη

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 2^η Στο φύλλο εργασίας 2 παρατηρήσαμε ότι με την μετακίνηση της συνάρτησης $f(x)=x^2$ πρώτα οριζόντια και κατόπιν κατακόρυφα προέκυψε μια άλλη συνάρτηση η οποία μετά από πράξεις κατέληγε σε τριώνυμο. Εδώ ας κάνουμε την αντίστροφη δουλειά. Έχουμε στην επιφάνεια των γραφικών την γραφική παράσταση του τριωνύμου $s(x)$ και έχουμε σαν στόχο να δούμε πως προκύπτει. Τσεκάρουμε το κουτί Εμφάνισέ την $f(x)=ax^2$

Στην επιφάνεια εργασίας εμφανίζονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=ax^2$ που κάθε φορά μεταβάλλεται ανάλογα του αριθμού a και ένα κείμενο με

χρήσιμους υπολογισμούς $\kappa = -\frac{b}{a}, \lambda = -\frac{\Delta}{4a}$ που έχουν να κάνουν με τους συντελε-

στές του τριωνύμου a, b, c . Δίνουμε στον δρομέα b πρώτα θετικές και μετά αρνητικές τιμές και παρατηρούμε το πρόσημο του αριθμού κ .

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 3^η Πατούμε το κουμπί: Δείτε την οριζόντια μετατόπιση της $f(x)$ κατά την τιμή κ Παρατηρούμε το πρόσημο του αριθμού κ , τον τύπο της συνάρτησης που προέκυψε $g(x)$ καθώς και προς τα πού έγινε η μετατόπιση αριστερά ή δεξιά από τον $y' y$.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 4^η

Πατούμε το κουμπί: Δες την κατακόρυφη μετατόπιση της $g(x)$ κατά την τιμή λ

Παρατηρούμε το πρόσημο του αριθμού λ , τον τύπο της συνάρτησης $p(x)$ που προέκυψε καθώς και προς τα πού έγινε η μετατόπιση πάνω ή κάτω από τον $x' x$. Με χρήση του δρομέων a, b, c δίνουμε θετικές η αρνητικές τιμές στον αριθμό λ . Δοκιμάστε τέτοιες τιμές ώστε την μια φορά $b^2 > 4ac$ και την άλλη φορά $b^2 < 4ac$

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 5^η Η επιφάνεια γραφικών δείχνει τη γραφική παράσταση του τριωνύμου $s(x)=ax^2+bx+c$ και το πινακάκι με τους χρήσιμους υπολογισμούς συμπληρώθηκε και με τις ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. Με το ποντίκι βάζουμε τον κέρσορα στον δρομέα a και δίνουμε θετικές τιμές προκειμένου να δούμε την κυρτότητα του τριωνύμου. Παρατηρούμε τις συντεταγμένες της κορυφής και την σχέση τους με τους αριθμούς κ, λ

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 6^η Με τον κέρσορα έχοντας πατημένο το αριστερό κλικ του ποντικιού σύρουμε το σημείο M της γραφικής παράστασης της $s(x)$ και παρατηρείστε τις μεταβαλλόμενες τεταγμένες του y που είναι και τιμές της συνάρτησης s και συγκρίνεται τις με την τεταγμένη της κορυφής. Προκειμένου να δούμε αν παρουσιάζει ελάχιστο η μέγιστο πόσο είναι αυτό και για ποια τιμή το παίρνει.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 7^η Παρατηρούμε τις τετμημένες των σημείων τομής E και H της γραφικής παράστασης της $s(x)$ με τον άξονα $x' x$ και τις ρίζες x_1 και x_2 του τριωνύμου. Καλούμε τους μα-

Σενάριο: Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+\gamma$ με $a \neq 0$ στο Γυμνάσιο.

θητές να δώσουν τέτοιε τιμές στα a, β, γ ώστε να προκύψουν και οι τρεις περιπτώσεις της διακρίνουσας

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 8^η Βάζουμε τον κέρσορα στον **δρομέα γ** και του δίνουμε τιμές καθώς και την τιμή 0. Παρατηρούμε την τεταγμένη του σημείου τομής Θ της γραφικής παράστασης της $s(x)$ με τον άξονα $\psi' \psi$ και τον αριθμό γ σταθερό όρο του τριωνύμου για να διαπιστώσουμε την ισότητα.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 9^η Παρατηρούμε την κατακόρυφη ευθεία ϵ και τον αριθμό κ προκειμένου να δούμε την εξίσωση της.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 10^η Πατούμε το κουμπί Έλεγχος συμμετρίας και παρατηρούμε το κινούμενο κάθετα στην ευθεία $\chi=\kappa$ διάνυσμα, καθώς και τη ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων που δημιουργούνται. Μετακινούμε με τον κέρσορα το σημείο M για να εξαγάγουμε συμπέρασμα για την συμμετρία.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 11^η 12^η Με τον κέρσορα δίνουμε στον αριθμό a από τον **δρομέα a** αρνητικές τιμές

Με τον κέρσορα έχοντας πατημένο το αριστερό κλικ του ποντικιού σύρετε το σημείο M της γραφικής παράστασης της $s(x)$ και παρατηρείστε τις μεταβαλλόμενες τεταγμένες του y που είναι και τιμές της συνάρτησης s και συγκρίνετε τις με την τεταγμένη της κορυφής προκειμένου να διαπιστώσουμε ότι είναι κοίλη και έχει μέγιστο.

Για την υλοποίηση της 4^{ης} δραστηριότητας δόθηκε το [φύλλο εργασίας 4](#).

❖ **Επέκταση του σεναρίου:** Με ελάχιστες προσθήκες στο σενάριο μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές της Α΄ Λυκείου προκειμένου να **οπτικοποιήσουν γεωμετρικά** την αλγεβρική έννοια των λύσεων (αν υπάρχουν) μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης σαν σημεία τομής του άξονα $\chi' \chi$ με τη γραφική παράσταση του τριωνύμου $y=ax^2+bx+\gamma$ με $a \neq 0$ και να μελετήσουν το πρόσημο του.

Το παρόν έγγραφο περιέχει 4 φύλλα εργασίας που συνοδεύουν το Σενάριο διδασκαλίας με τίτλο: **Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+c$ με $a \neq 0$** που αφορούν την ενότητα της συνάρτησης της παραβολής στα μαθηματικά της Γ' Γυμνασίου.

Τα 4 φύλλα εργασίας συνοδεύονται από 4 αρχεία **geogebra**.

Πριν τα φύλλα εργασίας παραθέτω μια πρόταση αξιολόγησης - αυτοαξιολόγησης του Σεναρίου.

Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή

❖ Ως προς τις επιδιώξεις του σεναρίου:

Ο εκπαιδευτικός ελέγχει κατά πόσο επιτεύχθηκαν οι στόχοι του σεναρίου και εξετάζει του λόγους για τους οποίους κάποιιοι δεν επιτεύχθηκαν ώστε να παρέμβει ανάλογα στο σενάριο.

❖ Ως προς τα εργαλεία:

Ο εκπαιδευτικός ελέγχει την ευκολία με την οποία οι μαθητές αξιοποίησαν τα εργαλεία του προτεινόμενου λογισμικού σε συνδυασμό με την σαφήνεια των οδηγιών του και των περιγραφών των φύλλων εργασίας. Αφού αξιολογήσει τα δεδομένα του επεμβαίνει ανάλογα στο σενάριο για την επόμενη εφαρμογή.

❖ Ως προς την διαδικασία υλοποίησης:

Ο εκπαιδευτικός αξιολογεί την διαδικασία υλοποίησης του σεναρίου αξιολογώντας τα στοιχεία που δεν δούλεψαν καλά και προσαρμόζει το σενάριο.

❖ Ως προς την προσαρμογή και επεκτασιμότητα:

Η δυνατότητα επέκτασης του σεναρίου και η ευκολία προσαρμογής σε ένα σχολικό περιβάλλον ή στην διδακτική ατζέντα ενός εκπαιδευτικού ή στην κουλτούρα μιας σχολικής τάξης είναι ένα από τα στοιχεία που το καθιστούν σημαντικό. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να λάβει σοβαρά υπόψη του αυτές τις παραμέτρους και να προσαρμόσει το σενάριο ανάλογα. Ιδιαίτερα όταν εφαρμόσει το σενάριο πολλές φορές και σε διαφορετικές τάξεις ή ανταλλάξει ιδέες με άλλους συναδέλφους του θα έχει δεδομένα με τα οποία θα μπορεί να κάνει ουσιαστικές προσαρμογές.

1^ο Φύλλο Εργασίας: Η τροχιά που διαγράφει η σφαίρα ενός εκκρεμούς

Όνοματεπώνυμο:

Τάξη – Τμήμα:

Ημερομηνία:



Ανοίξτε το αρχείο:



ΕΝΕΡΓΕΙΑ 1^η Κάντε αριστερό κλικ πάνω στο κουτί

Στην επιφάνεια γραφικών βλέπουμε την κίνηση της σφαίρας ενός εκκρεμούς. Η θέση K της σφαίρας κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0 \text{ sec}$ και $t \leq 8 \text{ sec}$ έχει συντεταγμένες $K(x,y)=K(t-4, \frac{1}{8}(t-4)^2)$ εξαρτώμενες από τον χρόνο t . Η τεταγμένη y της σφαίρας δίνει το ύψος της από το έδαφος σε cm.

Ερώτηση 1α) Να βρείτε τις συντεταγμένες τις θέσης της σφαίρας του εκκρεμούς στην έναρξη της κίνησης όταν $t=0$ καθώς και όταν ο χρόνος είναι $t=8$. Τι παρατηρείτε για το ύψος της σφαίρας από το δάπεδο και στις δύο περιπτώσεις; Παρατηρήστε τις συντεταγμένες των δύο παραπάνω σημείων-θέσεων της σφαίρας που προκύπτουν και αναφέρετε τι συμβαίνει με την συμμετρία τους.

Απάντηση:

.....
.....
.....

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 2^η

Αναφέραμε ότι η τετμημένη κάθε κινούμενου σημείου K είναι $x=t-4$ και η τεταγμένη του $y=\frac{1}{8}(t-4)^2$. Να θέσετε όπου $t-4=x$ στην $y=\frac{1}{8}(t-4)^2$.

Ερώτηση 2α) Να βρείτε την σχέση που συνδέει τις δύο μεταβλητές x και y . Ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή; Αν το $x=0$ να βρείτε πόσο είναι το y . Να βάλλεται όπου y το $f(x)$ και να γράψετε τι μορφή παίρνει η παραπάνω σχέση.

Απάντηση:

.....
.....
.....

Σενάριο: Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+c$ με $a \neq 0$ στο Γυμνάσιο.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 3^η Στόχος αυτής της ενέργειας να προσεγγίσουμε την γραφική παράσταση της σχέσης $y=f(x) = \frac{1}{8}x^2$ δηλαδή το σχήμα που προκύπτει αν ενώσω διαδοχικά σημεία της μορφής $(x, f(x))$.

Κάντε αριστερό κλικ στο κουτί **Σταμάτημα Εκκρεμούς**. Τσεκάρετε το κουτί **Θέλεις να γίνει προσέγγιση με 5 σημεία;**. Κάντε αριστερό κλικ στο κουτί

Κίνηση εκκρεμούς και εμφάνιση 5 σημείων. Περιμένετε μέχρι να εμφανιστούν 5 σημεία στην οθόνη καθώς κινείται το εκκρεμές. Έπειτα τσεκάρετε το κουτί

Προσέγγιση γραφικής παράστασης της τροχιάς με ένωση 5 σημείων και προσέξτε τον πίνακα τιμών της σχέσης f .

Μπορούμε να προσεγγίσουμε την γραφική παράσταση και με περισσότερα σημεία ακολουθώντας τα βήματα.

Κάντε αριστερό κλικ στο κουτί **Σταμάτημα Εκκρεμούς**. Τσεκάρετε το κουτί **Θέλεις να γίνει προσέγγιση με 9 σημεία;** Κάντε αριστερό κλικ στο κουτί

Κίνηση εκκρεμούς και εμφάνιση 9 σημείων. Περιμένετε μέχρι να εμφανιστούν 9 σημεία στην οθόνη καθώς κινείται το εκκρεμές. Έπειτα τσεκάρετε το κουτί

Προσέγγιση γραφικής παράστασης της τροχιάς με ένωση 9 σημείων και προσέξτε τον πίνακα τιμών της σχέσης f .

Ερώτηση 3α) κάντε μια εικασία για το πώς μπορεί να είναι η γραφική παράσταση(ευθεία ή καμπύλη;) σε ποιο σημείο τέμνει τους άξονες και προς τα πού είναι το άνοιγμά της (πάνω ή κάτω από τον $x'x$;))

Απάντηση:

.....
.....
.....

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 4^η

Στόχος αυτής της ενέργεια είναι να επιβεβαιώσουμε ή να απορρίψουμε την προηγούμενη εικασία μας, να κάνουμε έλεγχο αν η γραφική παράσταση αναφέρεται σε συνάρτηση και τέλος να βγάλουμε κάποια αρχικά συμπεράσματα τα οποία θα δούμε να επαληθεύονται πιο τεκμηριωμένα στα επόμενα φύλλα εργασίας. Κάντε αριστερό κλικ στο κουτί

Εμφάνιση / απόκρυψη της γραφικής παράστασης (τροχιά εκκρεμούς) και κατόπιν αριστερό κλικ στο κουτί **Έλεγχος αν η γραφική παρασταση αναφέρεται σε συνάρτηση**. Παρατηρείται μία κινούμενη ευθεία. Στην συνέχεια σε κάθε μετατόπιση της ευθείας τσεκάρετε και ξετσεκάρετε το κουτί **Έλεγχος αν η γραφική παρασταση αναφέρεται σε συνάρτηση** για να δείτε καρέ καρέ την κίνηση της ευθείας. Παρατηρείστε σε κάθε καρέ σε πόσα σημεία τέμνετε η ευθεία με την γραφική παράσταση της f .

Ερώτηση 4α) (Συμπλήρωση κενού)

Σενάριο: Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+c$ με $a \neq 0$ στο Γυμνάσιο.

Επειδή η κατακόρυφη ευθεία ϵ τέμνει την γραφική παράσταση της σχέσης $y=f(x)=\frac{1}{8}x^2$ σε ένα μόνο σημείο η παραπάνω σχέση είναι μια Η γραφική παράσταση (που λέγεται **παραβολή**) της παραπάνω συνάρτησης $y=f(x)=\frac{1}{8}x^2$ που έχει την μορφή $y=ax^2$ με $a>0$ είναι γραμμή με άνοιγμα από τον χ' και τέμνει τους άξονες στο σημείο

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 5^η Ξετσεκάρετε όλα τα τσεκαρισμένα κουτιά και κλείστε χωρίς αποθήκευση



1_Εκκρεμές
GeoGebra File
13 KB

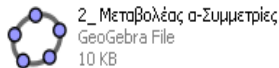
το αρχείο

2^ο Φύλλο Εργασίας: Ο μεταβολέας a -Συμμετρίες παραβολής

Όνοματεπώνυμο:

Τάξη – Τμήμα:

Ημερομηνία:



Ανοίξτε το αρχείο: Η επιφάνεια των γραφικών παρουσιάζει την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=ax^2$, με τον αριθμό a να μεταβάλλεται με την βοήθεια κάποιου **δρομέα a** .

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 1^η

Κάντε αριστερό κλικ πάνω στον **δρομέα a** και κατόπιν με το πάνω και κάτω βέλος του πληκτρολογίου μεταβάλλεται τις τιμές του a , και παρατηρείστε τις πολλαπλές αναπαραστάσεις που παίρνει η γραφική παράσταση της f και τις αλλαγές στον τύπο αυτής. Δώστε στον **δρομέα a** πρώτα θετικές και κατόπιν αρνητικές τιμές.

Ερώτηση 1α) Αν ο αριθμός $a > 0$ τότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται *πάνω* ή *κάτω* από τον άξονα x' ; Έχει το **άνοιγμα** της *προς τα πάνω* (κυρτή) ή *προς τα κάτω* (κοίλη);

Απάντηση:

.....
.....
.....

Ερώτηση 1β) (Συμπλήρωση κενού)

Αν ο αριθμός $a < 0$ τότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται..... από τον άξονα x' ; Έχει το **άνοιγμα** της προς.....(κοίλη).

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 2^η

Κάντε αριστερό κλικ πάνω στον **δρομέα a** και κατόπιν με το πάνω και κάτω βέλος του πληκτρολογίου μεταβάλλεται τις τιμές του a , ώστε να παίρνει μόνο **θετικές τιμές** και παρατηρείστε τις πολλαπλές αναπαραστάσεις που παίρνει η γραφική παράσταση της f .

Ερώτηση 2α) Αν ο αριθμός $a > 0$ όσο αυξάνει η τιμή του τότε η γραφική παράσταση της f συγκλίνει - πλησιάζει τον άξονα $y'y$ ή αποκλίνει ,απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$;

Απάντηση:

.....
.....
.....

Σενάριο: Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+c$ με $a \neq 0$ στο Γυμνάσιο.

Ερώτηση 2β) (Συμπλήρωση κενού)

Αν ο αριθμός $a > 0$ όσο μικραίνει η τιμή του τότε η γραφική παράσταση της f από τον άξονα $y' y$.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 3^η

Κάντε αριστερό κλικ πάνω στον **δρομέα a** και κατόπιν με το πάνω και κάτω βέλος του πληκτρολογίου μεταβάλλεται τις τιμές του **a**, ώστε να παίρνει μόνο **αρνητικές τιμές** και παρατηρήστε τις πολλαπλές αναπαραστάσεις που παίρνει η γραφική παράσταση της f .

Ερώτηση 3α) Αν ο αριθμός $a < 0$ όσο αυξάνει η τιμή του τότε η γραφική παράσταση της f συγκλίνει πλησιάζει τον άξονα $y' y$ ή αποκλίνει ,απομακρύνεται από τον άξονα $y' y$;

Απάντηση:.....

Ερώτηση 3β) (Συμπλήρωση κενού)

Αν ο αριθμός $a < 0$ όσο μικραίνει η τιμή του τότε η γραφική παράσταση της f από τον άξονα $y' y$.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 4^η

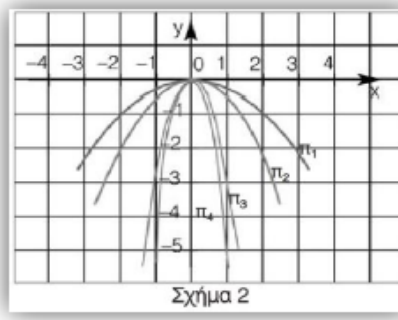
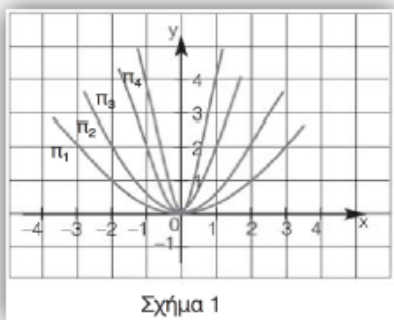
Για να ελέγξετε την ορθότητα των παραπάνω απαντήσεων σας, όπως και για να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα σας δίνεται μια δεύτερη ευκαιρία. Κάντε αριστερό κλικ άνω στο κουτί **Αυτόματη κίνηση δρομέα a** ώστε να το τσεκάρετε. Στην επιφάνεια γραφικών βλέπουμε τα ίχνη που αφήνει η γραφική παράσταση της f οπότε και τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της όταν ο αριθμός a μεταβάλλεται.

Εργασία 4α) (Αντιστοίχισης)

Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παραβολή $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ του σχήματος 1 μια από τις εξισώσεις:

α) $y = 2x^2$, β) $y = 4x^2$, γ) $y = \frac{1}{2}x^2$, δ) $y = \frac{1}{4}x^2$

π_1	π_2	π_3	π_4



Να κάνετε το ίδιο και για το σχήμα 2 με τις εξισώσεις:

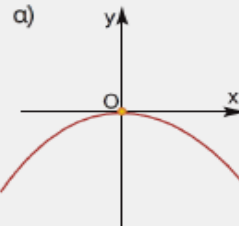
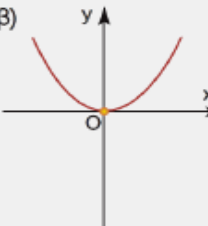
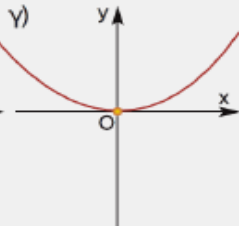

α) $y = -5x^2$, β) $y = -3x^2$, γ) $y = -\frac{1}{2}x^2$, δ) $y = -\frac{1}{4}x^2$

π_1	π_2	π_3	π_4

Ερώτηση 4β) (Αντιστοίχισης)

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παραβολή την εξίσωσή της.

1) $y = \frac{1}{3}x^2$ 2) $y = -3x^2$ 3) $y = -\frac{1}{3}x^2$ 4) $y = x^2$

α)  β)  γ)  δ) 

α	β	γ	δ



ΕΝΕΡΓΕΙΑ 5^η Να κάνετε αριστερό κλικ και να τσεκάρετε το κουτί Έχοντας τον **δρομέα α** να παίρνει μόνο θετικές τιμές κάντε αριστερό κλικ στο κουτί εμφάνιση / απόκρυψη του σημείου A ώστε να το τσεκάρετε. Στην επιφάνεια των γραφικών εμφανίζεται το σημείο A(x,y) της γραφικής παράστασης της f καθώς και ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 6^η

Κάντε αριστερό κλικ στον **δρομέα κ** και με την χρήση του πάνω και κάτω βέλους του πληκτρολογίου δώστε κίνηση στο σημείο A. Παρατηρείστε τις **τεταγμένες y** του σημείου A(x,y) που είναι και οι **τιμές της συνάρτησης f** καθώς αυτό κινείται, τόσο από το ζεύγος A(x,y) όσο και από τον πίνακα τιμών.

Ερώτηση 6α) (Συμπλήρωση κενού)

Αν ο αριθμός $a > 0$ τότε οι τεταγμένες **y** του τυχαίου σημείου A(x,y) άρα και οι **τιμές** της συνάρτησης **f** είναι μεγαλύτερες ή ίσες από τον αριθμό:.....

Ερώτηση 6β)

Αφού όλες οι τεταγμένες **y** άρα και οι τιμές της συνάρτησης είναι μεγαλύτερες ή ίσες από τον αριθμό..... τότε απαντήστε στην ερώτηση αν ο παραπάνω αριθμός είναι η μεγαλύτερη τιμή(**μέγιστη**) ή μικρότερη τιμή της συνάρτησης (**ελάχιστη**) καθώς και για ποια τιμή του x η τεταγμένη y παίρνει την παραπάνω τιμή.

Απάντηση:.....

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 7^η

Κάντε αριστερό κλικ στον **δρομέα α** και με την χρήση του πάνω και κάτω βέλους του πληκτρολογίου δώστε αρνητικές τιμές στο α. Κάντε αριστερό κλικ στον **δρομέα κ** και με την χρήση του πάνω και κάτω βέλους του πληκτρολογίου δώστε κίνηση στο σημείο A. Παρατηρείστε τις **τεταγμένες y** του σημείου A(x,y) που είναι και οι **τιμές της συνάρτησης f** καθώς αυτό κινείται τόσο από το ζεύγος A(x,y) όσο και από τον πίνακα τιμών.

Ερώτηση 7 α) (Σωστό-λάθος)

Σενάριο: Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+c$ με $a \neq 0$ στο Γυμνάσιο.

Αν ο αριθμός $a < 0$ τότε οι τεταγμένες y του τυχαίου σημείου $A(x,y)$ άρα και οι **τιμές** της συνάρτησης f είναι μικρότερες ή ίσες από τον αριθμό 0.

Σ

Λ

Ερώτηση 7β)

Αφού όλες οι τεταγμένες y άρα και οι τιμές της συνάρτησης είναι μικρότερες ή ίσες από τον αριθμό..... τότε απαντήστε στην ερώτηση, αν ο παραπάνω αριθμός είναι η μεγαλύτερη τιμή(**μέγιστη**) ή μικρότερη τιμή της συνάρτησης (**ελάχιστη**) καθώς και για ποια τιμή του x η τεταγμένη y παίρνει την παραπάνω τιμή.

Απάντηση:

.....
.....
.....

Δίνεται ο **ορισμός** ότι το σημείο $O(0,0)$ όπου η παραβολή παρουσιάζει **μέγιστο** ή **ελάχιστο** λέγεται **κορυφή** της παραβολής.

Ερώτηση 7γ)

Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις παίρνουν μέγιστη και ποιες ελάχιστη τιμή;

α) $y = -4x^2$ β) $y = 4x^2$ γ) $y = (-4x)^2$ δ) $y = -(4x)^2$

Απάντηση:

.....
.....
.....

Ερώτηση 7δ) (Σωστό-λάθος)

1) Η παραβολή $y=6x^2$ έχει κορυφή το σημείο $O(0,0)$.

Σ

Λ

2) Η συνάρτηση $y=-6x^2$ παίρνει ελάχιστη τιμή την $y=0$.

Σ

Λ

Σενάριο: Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+c$ με $a \neq 0$ στο Γυμνάσιο.

3) Η συνάρτηση $y=2x^2$ παίρνει μέγιστη τιμή την $y=0$.

Σ

Λ

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 8 ^η Κάντε αριστερό κλικ στο κουτί Συμμετρικά σημεία ως προς $y'y$ Το κινούμενο διάνυσμα δείχνει την διαδικασία εύρεσης συμμετρικού σημείου A' του κινούμενου σημείου A της f ως προς τον άξονα $y'y$. Ξετσεκάρτε το κουτί Συμμετρικά σημεία ως προς $y'y$ και με την χρήση του δρομέα k να πάρετε

άλλο σημείο A της f και να τσεκάρτε πάλι το κουτί Συμμετρικά σημεία ως προς $y'y$ προκειμένου να δείτε πάλι την παραπάνω διαδικασία. Με την χρήση του δρομέα k πάρτε άλλες θέσεις του σημείου A . Παρατηρείστε τόσο τις αποστάσεις των σημείων A και A' από τον άξονα $y'y$ όσο και τις συντεταγμένες τους.

Ερώτηση 8α) (Συμπλήρωση κενού)

Παρατηρώντας την κατασκευή του συμμετρικού A' κάθε σημείου A της γραφικής παράστασης της f βλέπουμε ότι αυτό ανήκει πάνω στην Άρα ο άξονας $y'y$ είναι της γραφικής παράστασης της f .

Ερώτηση 8β) (Συμπλήρωση κενού)

Οι αποστάσεις των σημείων A και του συμμετρικού του A' από τον άξονα $y'y$ είναι..... Άρα τα σημεία A και A' έχουν ίσες και αντίθετες.....

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 9

Κάντε αριστερό κλικ στο κουτί Συμμετρική γραφική παράσταση ως προς $y'y$ και τσεκάρτε το. Εμφανίζεται η συμμετρική γραφική παράσταση g ως προς $y'y$ της f .

Ερώτηση 9α)

Τι σχέση έχουν οι δύο γραφικές παραστάσεις και γιατί συμβαίνει αυτό;

Απάντηση:

.....
.....
.....

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 10

Κάντε αριστερό κλικ στο κουτί Συμμετρικά σημεία ως προς $y'y$ και στο κουτί Συμμετρική γραφική παράσταση ως προς $y'y$ προκειμένου να τα ξετσεκάρτε

Σενάριο: Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+c$ με $a \neq 0$ στο Γυμνάσιο.

Κάντε αριστερό κλικ στο κουτί Συμμετρικά σημεία ως προς $x'x$ προκειμένου να το τσεκάρετε και παρακολουθήστε το κινούμενο διάνυσμα που δείχνει την κατασκευή του συμμετρικού τυχαίου σημείου A της f ως προς $x'x$.

Με τον **δρομέα κ** κουνώντας τον σε όλη την διαδρομή του δημιουργούνται τα ίχνη των συμμετρικών των σημείων A ως προς $x'x$.

Ερώτηση 10α)

Μπορείτε να κάνετε μια εικασία για την γραφική παράσταση της συμμετρικής της f ως προς $x'x$;

Απάντηση:

.....

.....

.....

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 11 ^η

Τσεκάρετε το κουτί Συμμετρική γραφική παράσταση ως προς $x'x$.

Ερώτηση 11α) (Συμπλήρωση κενού)

Οι αριθμοί a μπροστά από τον τύπο της f και της συμμετρικής της ως προς $x'x$ είναι

Ερώτηση 11β) (Σωστό-λάθος)

1) Ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $y=2x^2$.

Σ

Λ

2) Οι παραβολές $y=-6x^2$ και $y=6x^2$ είναι συμμετρικές ως προς $x'x$.

Σ

Λ

3) Αν η παραβολή $y=ax^2$ διέρχεται από το σημείο M(-1,2) τότε θα διέρχεται και από το σημείο Λ(1,2).

Σ

Λ

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 12 ^η Κάντε αριστερό κλικ στο κουτί



και κλείστε χωρίς αποθήκευση το αρχείο



2_Μεταβολές α-Συμμετρίας
GeoGebra File
10 KB

3^ο Φύλλο Εργασίας: Οι μετατοπίσεις της συνάρτησης $y=x^2$

Όνοματεπώνυμο:

Τάξη – Τμήμα:

Ημερομηνία:



Ανοίξτε το αρχείο:
την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$.

Η επιφάνεια των γραφικών παρουσιάζει

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 1^η Κάντε αριστερό κλικ πάνω στο κουτί



και κατόπιν με το πληκτρολόγιο δώστε μια **θετική**

τιμή στο κουτί Δώστε τιμή για οριζόντια μετατόπιση 2 και τσεκάρτε το κουτί

Δείτε την οριζόντια μετατόπιση κατά την τιμή που δώσατε

Παρατηρείστε πως μεταβάλλεται ο τύπος της f και αν η μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f στον άξονα $x'x$ γίνεται αριστερά η δεξιά από τον άξονα $y'y$. Μπορείτε να επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία για περισσότερες από μια **θετικές τιμές** μετατόπισης πληκτρολογώντας στο κουτί την αντίστοιχη τιμή μετατόπισης και πατώντας **ENTER**.

Ερώτηση 1α) (Συμπλήρωση κενού)

1) Αν κάνω οριζόντια μετατόπιση κατά την τιμή $k=2$ η γραφική παράσταση της f μετατοπίζεται πάνω στον άξονα $x'x$ κατά θέσεις (συμπληρώστε **δεξιά** ή **αριστερά** του άξονα $y'y$) και ο τύπος της γίνεται $g(x)=\dots\dots\dots$ ενώ η κορυφή της είναι το σημείο $K(\dots,\dots)$

2) Αν κάνω οριζόντια μετατόπιση κατά την τιμή $k=3$ η γραφική παράσταση της f μετατοπίζεται πάνω στον άξονα $x'x$ κατά θέσεις (συμπληρώστε **δεξιά** ή **αριστερά** του άξονα $y'y$) και ο τύπος της γίνεται $g(x)=\dots\dots\dots$ ενώ η κορυφή της είναι το σημείο $K(\dots, \dots)$

Ερώτηση 1β) (γενίκευση της ερώτησης 1α)

Αν κάνω οριζόντια μετατόπιση κατά την τιμή $k>0$ τότε να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

Η γραφική παράσταση της f μετατοπίζεται πάνω στον άξονα $x'x$ αριστερά η δεξιά από τον άξονα $y'y$ και κατά πόσες θέσεις;


Ποιος είναι ο τύπος της μετατοπισμένης συνάρτησης;

Ποια είναι η κορυφή της μετατοπισμένης συνάρτησης;

Απάντηση:.....

.....

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 2^η

Πατήστε το κουτί  Κάντε αριστερό κλικ πάνω στο κουτί



και κατόπιν με το πληκτρολόγιο δώστε μια **αρνητική**

τιμή στο κουτί: Δώστε τιμή για οριζόντια μετατόπιση και τσεκάρετε το κουτί Δείτε την οριζόντια μετατόπιση κατά την τιμή που δώσατε

Παρατηρείστε πως μεταβάλλεται ο τύπος της f και στο αν η μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f στον άξονα $x'x$ γίνεται αριστερά η δεξιά από τον άξονα $y'y$. Μπορείτε να επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία για περισσότερες από μια **αρνητικές τιμές** μετατόπισης πληκτρολογώντας στο κουτί την αντίστοιχη τιμή μετατόπισης και πατώντας **ENTER**. **Ερώτηση 2α) (Συμπλήρωση κενού)**

1) Αν κάνω οριζόντια μετατόπιση κατά την τιμή $k = -2$ η γραφική παράσταση της f μετατοπίζεται πάνω στον άξονα $x'x$ κατά θέσεις (συμπληρώστε **δεξιά** η **αριστερά** του άξονα $y'y$) και ο τύπος της γίνεται $g(x) = \dots\dots\dots$ ενώ η κορυφή της είναι το σημείο $K(\dots, \dots)$. Άξονας συμμετρίας νέας συνάρτησης είναι η κατακόρυφη ευθεία $x = \dots\dots\dots$

2) Αν κάνω οριζόντια μετατόπιση κατά την τιμή $k = -3$ η γραφική παράσταση της f μετατοπίζεται πάνω στον άξονα $x'x$ κατά θέσεις (συμπληρώστε **δεξιά** η **αριστερά** του άξονα $y'y$) και ο τύπος της γίνεται $g(x) = \dots\dots\dots$ ενώ η κορυφή της είναι το σημείο $K(\dots, \dots)$. Άξονας συμμετρίας της νέας συνάρτησης είναι η κατακόρυφη ευθεία $x = \dots\dots\dots$

Ερώτηση 2β) (γενίκευση της ερώτησης 1)

Αν κάνω οριζόντια μετατόπιση κατά την τιμή $k < 0$ τότε να απαντήσετε στις παρακάτω επιμέρους ερωτήσεις:

Η γραφική παράσταση της f μετατοπίζεται πάνω στον άξονα $x'x$ αριστερά η δεξιά του άξονα $y'y$ και κατά πόσες θέσεις;

Ποιος είναι ο τύπος της μετατοπισμένης συνάρτησης; Ποιος είναι άξονας συμμετρίας νέας συνάρτησης;

Απάντηση:.....
.....
.....
.....

Ερώτηση 2γ) (Αντίστροφο σκεπτικό των παραπάνω ερωτήσεων)

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Η παραβολή $y = (x-4)^2$ έχει κορυφή το σημείο:

- 1) (4,0) 2) (-4,0) 3) (0,4) 4) (0,-4)

Η παραβολή $y = (x+4)^2$ έχει κορυφή το σημείο:


- 1) (4,0) 2) (-4,0) 3) (0,4) 4) (0,-4)

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 3 ^η Πατήστε το κουτί  Κάντε αριστερό κλικ πάνω στο κουτί

 , και κατόπιν με το πληκτρολόγιο

δώστε μια **θετική** τιμή στο κουτί: Δώστε τιμή για κατακόρυφη μετατόπιση και
 Δείτε την κατακόρυφη μετατόπιση κατά την τιμή που δώσατε
τσεκάρετε το κουτί:

Παρατηρείστε πως μεταβάλλεται ο τύπος της f και στο αν η μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f στον άξονα $y'y$ γίνεται πάνω από τον άξονα $x'x$ η κάτω από τον άξονα

$x'x$. Πατώντας το κουτί  μπορείτε να επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία για περισσότερες από μια **θετικές** τιμές μετατόπισης

Ερώτηση 3α) (Συμπλήρωση κενού)

1) Αν κάνω κατακόρυφη μετατόπιση κατά την τιμή 2 η γραφική παράσταση της f μετατοπίζεται πάνω στον άξονα $y'y$ κατά θέσεις (συμπληρώστε **πάνω** ή **κάτω** από τον άξονα $x'x$) και ο τύπος της γίνεται $g(x)=\dots\dots\dots$ ενώ η κορυφή της είναι το σημείο $K(\dots, \dots)$ Άξονας συμμετρίας της νέας συνάρτησης είναι ο.....

2) Αν κάνω κατακόρυφη μετατόπιση κατά την τιμή 3 η γραφική παράσταση της f μετατοπίζεται πάνω στον άξονα $y'y$ κατά θέσεις (συμπληρώστε **πάνω** ή **κάτω** από τον άξονα $x'x$) και ο τύπος της γίνεται $g(x)=\dots\dots\dots$ ενώ η κορυφή της είναι το σημείο $K(\dots, \dots)$ Άξονας συμμετρίας της νέας συνάρτησης είναι ο.....

Ερώτηση 3β) (γενίκευση της ερώτησης1)

Αν κάνω κατακόρυφη μετατόπιση πάνω στον άξονα $y'y$ κατά την τιμή $k > 0$ τότε να απαντήσετε στις παρακάτω επιμέρους ερωτήσεις:

Η γραφική παράσταση της f μετατοπίζεται πάνω στον άξονα $y'y$ πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x$ και κατά πόσες θέσεις;

Ποιος είναι ο τύπος της μετατοπισμένης συνάρτησης;

Ποια είναι η κορυφή της μετατοπισμένης συνάρτησης;

Απάντηση.....
.....
.....

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 4 ^η Πατήστε το κουτί  . Κάντε αριστερό κλικ πάνω στο κουτί

 , και κατόπιν με το πληκτρολόγιο

δώστε μια **αρνητική** τιμή στο κουτί: Δώστε τιμή για κατακόρυφη μετατόπιση και
τσεκάρτε το κουτί Δείτε την κατακόρυφη μετατόπιση κατά την τιμή που δώσατε

Παρατηρείστε πως μεταβάλλεται ο τύπος της f και στο αν η μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f στον άξονα $y'y$ γίνεται πάνω από τον άξονα $x'x$ ή κάτω από τον άξονα

$x'x$. Πατώντας το κουτί μπορείτε να επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία για περισσότερες από μια **αρνητικές** τιμές μετατόπισης

Ερώτηση 4α) (Συμπλήρωση κενού)

1) Αν κάνω κατακόρυφη μετατόπιση κατά την τιμή -2 η γραφική παράσταση της f μετατοπίζεται πάνω στον άξονα $y'y$ κατά θέσεις (συμπληρώστε **πάνω** ή **κάτω** από τον άξονα $x'x$) και ο τύπος της γίνεται $g(x)=\dots\dots\dots$ ενώ η κορυφή της είναι το σημείο $K(\dots, \dots)$ Άξονας συμμετρίας νέας συνάρτησης είναι ο.....

2) Αν κάνω κατακόρυφη μετατόπιση κατά την τιμή -3 η γραφική παράσταση της f μετατοπίζεται πάνω στον άξονα $y'y$ κατά θέσεις (συμπληρώστε **πάνω** ή **κάτω** από τον άξονα $x'x$) και ο τύπος της γίνεται $g(x)=\dots\dots\dots$ ενώ η κορυφή της είναι το σημείο $K(\dots, \dots)$ Άξονας συμμετρίας νέας συνάρτησης είναι ο.....

Ερώτηση 4β) (γενίκευση της ερώτησης 1)

Αν κάνω κατακόρυφη μετατόπιση πάνω στον άξονα $y'y$ κατά την τιμή $k < 0$ τότε να απαντήσετε στις παρακάτω επιμέρους ερωτήσεις:

Η γραφική παράσταση της f μετατοπίζεται πάνω στον άξονα $y'y$ πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x$ και κατά πόσες θέσεις;

Ποιος είναι ο τύπος της μετατοπισμένης συνάρτησης;

Ποια είναι η κορυφή της μετατοπισμένης συνάρτησης;

Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας νέας συνάρτησης

Απάντηση.....
.....
.....
.....

Ερώτηση 4γ) (Αντίστροφο σκεπτικό των παραπάνω ερωτήσεων)

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

Η παραβολή $y=x^2+4$ έχει κορυφή το σημείο:

- 1) (4,0) 2) (-4,0) 3) (0,4) 4) (0,-4)

Η παραβολή $y=x^2-4$ έχει κορυφή το σημείο:

- 1) (4,0) 2) (-4,0) 3) (0,4) 4) (0,-4)

Σενάριο: Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+c$ με $a \neq 0$ στο Γυμνάσιο.

Ερώτηση 4γ) (Αντιστοιχίσεις)

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παραβολή την εξίσωσή της.

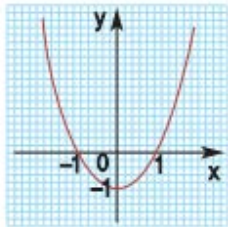
1. $y = (x + 1)^2$

2. $y = x^2 - 1$

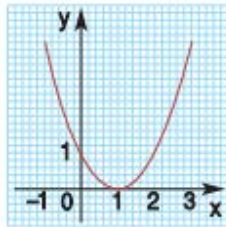
3. $y = x^2 + 1$

4. $y = (x - 1)^2$

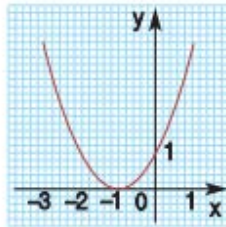
α)



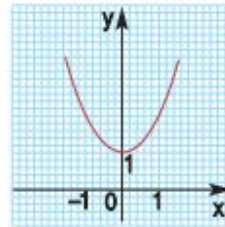
β)



γ)



δ)



α	β	γ	δ

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 5 ^η Πατήστε το κουτί Κάντε αριστερό κλικ πάνω στο κουτί

κατόπιν με το πληκτρολόγιο

δώστε μια **αρνητική ή θετική** τιμή στο κουτί: **Δώστε τιμή για οριζόντια μετατόπιση** και τσεκάρτε το κουτί **Δείτε την οριζόντια μετατόπιση κατά την τιμή που δώσατε** τέλος δώστε μια **αρ-**

νητική ή θετική τιμή στο κουτί: **Δώστε τιμή για κατακόρυφη μετατόπιση** και τσεκάρτε το κουτί **Δείτε την ταυτόχρονη μετατόπιση**

Παρατηρείστε πως μεταβάλλεται ο τύπος της, η κο-

ρυφή της και ο άξονας συμμετρίας της. Πατώντας το κουτί μπορείτε να επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία.

Ερώτηση 5α) (Συμπλήρωση κενού)

1) Αν πρώτα κάνω οριζόντια μετατόπιση δεξιά από τον άξονα $y'y$ κατά $k=3$ μονάδες και κατόπιν κατακόρυφη μετατόπιση πάνω από τον άξονα $x'x$ κατά $\lambda=1$ μονάδα τότε θα προκύψει ο τύπος της συνάρτησης $p(x)=(x+\dots)^2+\dots$. Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο $K(\dots, \dots)$. Άξονας συμμετρίας νέας συνάρτησης είναι η κατακόρυφη ευθεία $x=\dots$.

2) Ο τύπος της συνάρτησης $p(x)=(x+4)^2-2$ προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της $f(x)=x^2$ κατά \dots θέσεις \dots (συμπληρώστε **δεξιά** ή **αριστερά**) από τον άξονα $y'y$ και κατόπιν την κατακόρυφη μετατόπιση της $g(x)=(x+4)^2$ \dots (συμπληρώστε **άνω** ή **κάτω**) από τον άξονα $x'x$ κατά \dots μονάδες. Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο $K(\dots, \dots)$. Άξονας συμμετρίας νέας συνάρτησης είναι η κατακόρυφη ευθεία $x=\dots$.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 6 ^η Τσεκάρτε το κουτί: **Εμφάνισε την συνάρτηση του τριωνύμου**

Ερώτηση 6α)

Αναπτύξτε την ταυτότητα που εμφανίζεται κάθε φορά στην συνάρτηση $p(x)$ κάντε αναγωγή ομοίων όρων και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με το τριώνυμο $w(x)$. Τί παρατηρείτε;

Σενάριο: Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+c$ με $a \neq 0$ στο Γυμνάσιο.

Απάντηση

.....
.....
.....

Ερώτηση 6β) (Συμπλήρωση κενού)

Έχοντας υπόψη το αποτέλεσμα της προηγούμενης ερώτησης και την ισότητα

$x^2-4x+7=(x-2)^2+3$, η γραφική παράσταση του τριωνύμου προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της συνάρτησης $f(x)=x^2$ στον άξονα $x'x$ κατά 2 μονάδες.....(συμπληρώστε **δεξιά ,αριστερά**) από τον άξονα $y'y$ και κατόπιν 3 μονάδες κατακόρυφα στον $y'y$ (συμπληρώστε πάνω η κάτω) από τον $x'x$.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 7^η Πατήστε το κουτί  **Αρχή** και κλείστε χωρίς αποθήκευση το αρχείο



3_Μετατοπίσεις της $y=ax^2$
GeoGebra File
15 KB

4^ο Φύλλο Εργασίας: Μετατοπίσεις της $y=ax^2$ - τριώνυμο

Όνοματεπώνυμο:

Τάξη – Τμήμα:

Ημερομηνία:



Ανοίξτε το αρχείο:

Η επιφάνεια των γραφικών παρουσιάζει την γραφική παράσταση της συνάρτησης τριωνύμου $s(x)=ax^2+bx+c$ με τους συντελεστές της a, b, c να μεταβάλλονται με την βοήθεια 3 δρομέων

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 1 ^η Κάντε αριστερό κλικ πάνω στους **δρομείς a, b, c** και σύροντας τους δώστε τιμές στους συντελεστές a, b, c με $a \neq 0$ και παρατηρείστε τις πολλαπλές αναπαραστάσεις που παίρνει η γραφική παράσταση της s και τις αλλαγές στον τύπο αυτής.

Δώστε στον **δρομέα a** πρώτα θετικές τιμές.

Ερώτηση 1α) Αν ο αριθμός $a > 0$ τότε η γραφική παράσταση της s είναι παραβολή και έχει το **άνοιγμα** της **προς τα πάνω**(κυρτή) ή **προς τα κάτω**(κοίλη); Παρουσιάζει ελάχιστο ή μέγιστο;

Απάντηση:.....

Δώστε στον **δρομέα a** τώρα αρνητικές τιμές.

Ερώτηση 1β) (Συμπλήρωση κενού)

Αν ο αριθμός $a < 0$ τότε η γραφική παράσταση της s είναι παραβολή Έχει το **άνοιγμα** της προς..... και παρουσιάζει

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 2 ^η Στο φύλλο εργασίας 2 παρατηρήσαμε ότι με την μετακίνηση της συνάρτησης $f(x)=x^2$ πρώτα οριζόντια και κατόπιν κατακόρυφα προέκυπτε μια άλλη συνάρτηση η οποία μετά από πράξεις κατέληγε σε τριώνυμο. Εδώ ας κάνουμε την αντίστροφη δουλειά. Έχουμε στην επιφάνεια των γραφικών την γραφική παράσταση του τριωνύμου $s(x)$ και έχουμε σαν στόχο να δούμε πως προκύπτει.

Κάντε αριστερό κλικ στο κουτί:  τσεκάρετε το κουτί Εμφάνισέ την $f(x)=ax^2$ και

κατόπιν πατήστε το κουμπί 

Στην επιφάνεια εργασίας εμφανίζονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=ax^2$ που κάθε φορά μεταβάλλεται ανάλογα του αριθμού a και ένα κείμενο με χρήσιμους υπολογισμούς που έχουν να κάνουν με τους συντελεστές του τριωνύμου a, b, c .

Χρήσιμοι υπολογισμοί: $k = -b/(2 \cdot a)$
 $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$
 $\lambda = -\Delta/(4 \cdot a)$

Σενάριο: Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+\gamma$ με $a \neq 0$ στο Γυμνάσιο.

Με το ποντίκι κάντε κλικ στον **δρομέα β** και δώστε του θετικές και μετά αρνητικές τιμές και παρατηρείστε το πρόσημο του αριθμού **κ**.

Ερώτηση 2α) (Συμπλήρωση κενού)

Αν ο αριθμός $\beta > 0$ τότε ο αριθμός **κ** είναι.....(συμπληρώστε **θετικός** ή **αρνητικός**) ενώ αν ο αριθμός $\beta < 0$ τότε ο αριθμός **κ** είναι άρα το πρόσημο του αριθμού κ εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμού.....

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 3 η

Πατήστε το κουμπί: Δείτε την οριζόντια μετατόπιση της $f(x)$ κατά την τιμή **κ** Παρατηρείστε το πρόσημο του αριθμού κ, τον τύπο της συνάρτησης που προέκυψε **g(x)** καθώς και προς τα πού έγινε η μετατόπιση αριστερά ή δεξιά από τον $y'y$. Πατώντας το κουμπί:



και με χρήση του **δρομέα β** να δώσετε θετικές η αρνητικές τιμές στον αριθμό κ ώστε πατώντας το κουπί Δείτε την οριζόντια μετατόπιση της $f(x)$ κατά την τιμή **κ** να κάνετε τις παρατηρήσεις που σας ζητήθηκαν προηγουμένως.

Ερώτηση 3α) (Συμπλήρωση κενού)

Αν ο αριθμός $\kappa > 0$ τότε η γραφική παράσταση της $f(x)=ax^2$ μετατοπίζεται οριζόντια πάνω στον άξονα και η νέα γραφική παράσταση βρίσκεται.....(συμπληρώστε **δεξιά** ή **αριστερά**) από τον άξονα $y'y$. Ο τύπος της νέας συνάρτησης θα έχει την μορφή $g(x)=$

(συμπληρώστε $a(x-\kappa)^2$ ή $a(x+\kappa)^2$)

Ερώτηση 3β) (Συμπλήρωση κενού)

Αν ο αριθμός $\kappa < 0$ τότε η γραφική παράσταση της $f(x)=ax^2$ μετατοπίζεται οριζόντια πάνω στον άξονα και η νέα γραφική παράσταση βρίσκεται.....(συμπληρώστε **δεξιά** ή **αριστερά**) από τον άξονα $y'y$. Ο τύπος της νέας συνάρτησης θα έχει την μορφή $g(x)=$

(συμπληρώστε $a(x-\kappa)^2$ ή $a(x+\kappa)^2$)

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 4 η

Πατήστε το κουμπί

Πατήστε το κουμπί: Δες την κατακόρυφη μετατόπιση της $g(x)$ κατά την τιμή **λ**

Παρατηρείστε το πρόσημο του αριθμού **λ**, τον τύπο της συνάρτησης **p(x)** που προέκυψε καθώς και προς τα πού έγινε η μετατόπιση πάνω ή κάτω από τον $x'x$. Πατώντας το κου-



μπι: και με χρήση του **δρομέων α, β, γ** να δώσετε θετικές η αρνητικές τιμές στον αριθμό λ. Δοκιμάστε τέτοιες τιμές ώστε την μια φορά $\beta^2 > 4a\gamma$ και την άλλη φορά $\beta^2 < 4a\gamma$

Σενάριο: Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+\gamma$ με $a \neq 0$ στο Γυμνάσιο.

ώστε πατώντας το κουπί Δες την κατακόρυφη μετατόπιση της $g(x)$ κατά την τιμή λ να κάνετε τις παρατηρήσεις που σας ζητήθηκαν προηγουμένως.

Ερώτηση 4α) (Συμπλήρωση κενού)

Αν $\beta^2 > 4\alpha\gamma$ τότε $\beta^2 - 4\alpha\gamma \dots\dots\dots$ (συμπληρώστε >0 ή <0) άρα και η $\Delta \dots\dots\dots$ (συμπληρώστε >0 ή <0) οπότε ο αριθμός $\lambda = -\frac{\Delta}{4\alpha} \dots\dots\dots$ (συμπληρώστε >0 ή <0)

Ερώτηση 4β) (Συμπλήρωση κενού)

Αν ο αριθμός $\lambda > 0$ τότε η γραφική παράσταση της $g(x)$ μετατοπίζεται κατακόρυφα πάνω στην ευθεία $x = \dots\dots\dots$ κατά $\dots\dots\dots$ θέσεις προς τα $\dots\dots\dots$ (συμπλήρωσε προς τα **πάνω** ή **κάτω**) Ο τύπος της νέας συνάρτησης θα έχει την μορφή $p(x) = a(x-k)^2 + \dots\dots\dots$

Ερώτηση 4γ) (Συμπλήρωση κενού)

Αν ο αριθμός $\lambda < 0$ τότε η γραφική παράσταση της $g(x)$ μετατοπίζεται κατακόρυφα πάνω στην ευθεία $x = \dots\dots\dots$ κατά $\dots\dots\dots$ θέσεις προς τα $\dots\dots\dots$ (συμπλήρωσε προς τα πάνω ή κάτω) Ο τύπος της νέας συνάρτησης θα έχει την μορφή $p(x) = a(x-k)^2 + \dots\dots\dots$

Ερώτηση 4δ) (Συμπλήρωση κενού)

Ο τύπος της συνάρτησης $p(x) = -3(x+4)^2 - 5$ προέκυψε από την μετατόπιση της $f(x) = \dots\dots\dots$ οριζόντια πάνω στον άξονα $x'x$ κατά $\dots\dots\dots$ θέσεις $\dots\dots\dots$ (συμπλήρωσε αριστερά ή δεξιά) από τον άξονα $y'y$ και κατόπιν με κατακόρυφη μετατόπιση της $g(x) = -3(x+4)^2$ πάνω στην ευθεία $x = \dots\dots\dots$ θέσεις προς τα $\dots\dots\dots$ (συμπλήρωσε προς τα πάνω ή κάτω).

Ερώτηση 4ε) (Συμπλήρωση κενού)

Αφού ολοκληρωθεί στην επιφάνεια γραφικών και η κατακόρυφη μετατόπιση τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $p(x) \dots\dots\dots$ με την γραφική παράσταση του τριωνύμου $s(x)$. Ας επιχειρήσουμε να δώσουμε ένα συμπέρασμα:

Η γραφική παράσταση του τριωνύμου $s(x) = ax^2 + bx + \gamma$ προκύπτει από την $\dots\dots\dots$ μετατόπιση πάνω στον $x'x$ της $f(x) = ax^2$ κατά k θέσεις όπου $k = \dots\dots\dots$ (τύπος) και κατόπιν από την $\dots\dots\dots$ μετατόπιση πάνω στην ευθεία $x = \dots\dots\dots$ της $g(x) = a(x-k)^2$ κατά λ θέσεις όπου $\lambda = \dots\dots\dots$ (τύπος).

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 5^η



Κάντε αριστερό κλικ στο κουτί:

Η επιφάνεια γραφικών δείχνει τη γραφική παράσταση του τριωνύμου $s(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και το πινακάκι με τους χρήσιμους υπολογισμούς συμπληρώθηκε και με τις ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. Με το ποντίκι βάλτε τον κέρσορα στον **δρομέα a** και δώστε του θετικές τιμές.

Ερώτηση 5α) (Συμπλήρωση κενού)

Σενάριο: Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+\gamma$ με $a \neq 0$ στο Γυμνάσιο.

Αν το $a > 0$ η γραφική παράσταση του τριωνύμου είναι παραβολή με άνοιγμα προς τα.....

Ερώτηση 5β) (Συμπλήρωση κενού)

Παρατηρείστε τις συντεταγμένες του σημείου Z και τους αριθμούς κ, λ

Η τετμημένη x του σημείου Z ισούται με τον αριθμό..... ενώ η τεταγμένη y του σημείου Z ισούται με τον αριθμό.....

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 6 η

Με τον βέλος του ποντικιού έχοντας πατημένο το αριστερό κλικ του ποντικιού σύρετε το σημείο M της γραφικής παράστασης της $s(x)$ και παρατηρείστε τις μεταβαλλόμενες τεταγμένες του y που είναι και τιμές της συνάρτησης s και συγκρίνετε τις με την τεταγμένη του σημείου Z.

Ερώτηση 6α) (Συμπλήρωση κενού)

Αν το $a > 0$ όλες οι τιμές του τριωνύμου είναι.....(συμπληρώστε μεγαλύτερες, ίσες ή μικρότερες ίσες) από την τεταγμένη του σημείου Z η οποία ισούται με τον αριθμό..... Άρα το τριώνυμο έχει.....(συμπληρώστε μέγιστη ή ελάχιστη τιμή) τον αριθμό $y=.....$ και παίρνει αυτήν την τιμή όταν το $x=.....$. Το σημείο Z λέγεται **κορυφή** της παραβολής.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 7 η

1ο σκέλος της 7ης ενέργειας

Με το ποντίκι μεταβάλετε τους **δρομείς α,β,γ** έτσι ώστε $a \neq 0$ και τα **α, γ** ομόσημοι. Παρατηρείστε τις τετμημένες των σημείων τομής E και H της γραφικής παράστασης της $s(x)$ με τον άξονα $x'x$ και τις ρίζες x_1 και x_2 του τριωνύμου.

Ερώτηση 7α) (Συμπλήρωση κενού)

Αν $a \neq 0$ και τα α, γ ομόσημοι τότε η διακρίνουσα Δ(συμπληρώστε >0 , <0 , $=0$) Το τριώνυμο έχει.....ρίζες(2ίσες ή 2 άνισες).Οι τετμημένες των σημείων τομής E και H της γραφικής παράστασης της $s(x)$ με τον άξονα $x'x$ είναι.....με τις ρίζες x_1 και x_2 του τριωνύμου. Τα σημεία τομής έχουν την μορφή: E(....., 0) και Z(....., 0).

2ο σκέλος της 7ης ενέργειας

Με τον βέλος του ποντικιού μεταβάλετε του **δρομείς α,β,γ** έτσι ώστε $a \neq 0$, $\beta^2 < 4\alpha\gamma$.

Ερώτηση 7β)

Τι πρόσημο έχει η διακρίνουσα και γιατί, πόσες ρίζες έχει η εξίσωση και πόσα είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τον άξονα $x'x$.

Απάντηση

.....

3ο σκέλος της 7ης ενεργειας

Με τον βέλος του ποντικιού μεταβάλετε του **δρομείς α,β,γ** έτσι ώστε $a \neq 0$, $\beta^2 = 4\alpha\gamma$.

Ερώτηση 7β)

Σενάριο: Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+c$ με $a \neq 0$ στο Γυμνάσιο.

Με τι ισούται η διακρίνουσα, πόσες ρίζες έχει η εξίσωση και πόσα είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τον άξονα $x'x$. Τι παρατηρείτε για τις τετμημένες των σημείων τομής και τις ρίζες του τριωνύμου;

Απάντηση

.....

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 8^η

Βάλτε τον κέρσορα στον **δρομέα γ** και δώστε του τιμές καθώς και την τιμή 0. Παρατηρείστε την τεταγμένη του σημείου τομής Θ της γραφικής παράστασης της $s(x)$ με τον άξονα $y'y$ και τον αριθμό γ σταθερό όρο του τριωνύμου.

Ερώτηση 8α) (Συμπλήρωση κενού)

Η τεταγμένη y σημείου τομής Θ της γραφικής παράστασης της $s(x)$ με τον άξονα $y'y$ είναι..... με τον αριθμό γ .

Το σημείο γ έχει την μορφή $\Theta(0, \dots)$. Αν το $\gamma=0$ η γραφική παράσταση της $s(x)$ τέμνει τον $y'y$ στο σημείο.....

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 9^η

Παρατηρήστε την κατακόρυφη ευθεία ϵ και τον αριθμό κ .

Ερώτηση 9α) (Συμπλήρωση κενού)

Η εξίσωση της ευθείας ϵ είναι $x = \dots$

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 10^η

Πατήστε το κουμπί Έλεγχος συμμετρίας και παρατηρείστε το κινούμενο κάθετα στην ευθεία $x=\kappa$ διάνυσμα, καθώς και τη ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων που δημιουργούνται. Μετακινείστε με τον κέρσορα το σημείο M και συνεχίζεται να κάνετε τις παραπάνω παρατηρήσεις.

Ερώτηση 10α) (Συμπλήρωση κενού)

Τα συμμετρικά σημεία M' των σημείων M ως προς την ευθεία $x=\kappa$ της γραφικής παράστασης του τριωνύμου βρίσκονται πάνω στην

Άρα η ευθεία είναι της γραφικής παράστασης του τριωνύμου.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 11^η

Με τον κέρσορα δώστε στον αριθμό a από τον **δρομέα a** αρνητικές τιμές

Ερώτηση 11α) (Συμπλήρωση κενού)

Αν το $a < 0$ η γραφική παράσταση του τριωνύμου είναι παραβολή με άνοιγμα προς τα.....

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 12^η

Με τον κέρσορα έχοντας πατημένο το αριστερό κλικ του ποντικιού σύρετε το σημείο M της γραφικής παράστασης της $s(x)$ και παρατηρείστε τις μεταβαλλόμενες τεταγμένες του y που είναι και τιμές της συνάρτησης s και συγκρίνεται τις με την τεταγμένη του σημείου Z

Ερώτηση 12α) (Συμπλήρωση κενού)

Σενάριο: Οι συναρτήσεις $y=ax^2$ και $y=ax^2+bx+\gamma$ με $a \neq 0$ στο Γυμνάσιο.

Αν το $a < 0$ όλες οι τιμές του τριωνύμου είναι.....(συμπληρώστε μεγαλύτερες, ίσες ή μικρότερες ίσες) από την τεταγμένη του σημείου Z η οποία ισούται με τον αριθμόΆρα το τριώνυμο έχει(συμπληρώστε μέγιστη ή ελάχιστη τιμή) τον αριθμό $y=.....$ και παίρνει αυτήν την τιμή όταν το $x=.....$. Το σημείο **Z** λέγεται **κορυφή** της παραβολής.

Ας επιχειρήσουμε να συμμαζέψουμε τις παραπάνω γνώσεις που πήραμε για το τριώνυμο καταλήγοντας σε κάποιο συμπέρασμα.

Ερώτηση 12β) (Συμπλήρωση κενού)

Δίνεται το τριώνυμο $y=ax^2+bx+\gamma$ με $a < 0$ και οι αριθμοί $\kappa = -\frac{\beta}{\alpha}, \lambda = -\frac{\Delta}{4\alpha}$ και οι ρίζες του x_1 και x_2

- 1) Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία..... και τον άξονα $y'y$ στο σημείο.....
- 2) Η γραφική παράσταση είναι παραβολή με άξονα συμμετρίας την ευθεία..... και κορυφή το σημείο.....
- 3) Η συνάρτηση αυτή παίρνει μέγιστη τιμή την $y=.....$, όταν $x=.....$
- 4) Στην περίπτωση που το $a > 0$ η συνάρτηση αυτή παίρνει.....τιμή την $y=.....$, όταν $x=.....$

ΕΝΕΡΓΕΙΑ 13^η Πατήστε το κουτί **ΑΡΧΗ** και κατόπιν κλείστε το αρχείο



4_τριώνυμο
GeoGebra File
12 KB