ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
32η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
28 Φεβρουαρίου 2015

Θέματα μικρών τάξεων

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ (*εκτός από αυτές τις λύσεις κάθε άλλη τεκμηριωμένη λύση, είναι αποδεκτή*)

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2+(\alpha-2)x-(\alpha-1)(2\alpha-3)=0$$

έχει δύο ρίζες, τέτοιες ώστε η μία να ισούται με το τετράγωνο της άλλης.

Λύση

Έχουμε $\Delta=(\alpha-2)^2+4(\alpha-1)(2\alpha-3)=9\alpha^2-24\alpha+16=(3\alpha-4)^2$, οπότε η εξίσωση έχει τις ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{2-\alpha\pm(3\alpha-4)}{2}\Leftrightarrow x_1=\alpha-1,\ x_2=-2\alpha+3.$$

Επομένως ζητάμε τις τιμές του α για τις οποίες ισχύει:

$$x_1=x_2^2 \text{ ή } x_2=x_1^2 \Leftrightarrow \alpha-1=(-2\alpha+3)^2 \text{ ή } -2\alpha+3=(\alpha-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha-1=4\alpha^2-12\alpha+9 \quad \text{ή} \quad -2\alpha+3=\alpha^2-2\alpha+1$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2-13\alpha+10=0 \text{ ή } \alpha^2=2 \Leftrightarrow \alpha=2 \text{ ή } \alpha=\frac{5}{4} \text{ ή } \alpha=\sqrt{2} \text{ ή } \alpha=-\sqrt{2}.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη μη αρνητικών ακέραιων (m,n) με $m\geq n$, που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $\mathrm{A}=(m+n)^3$ να διαιρεί τον αριθμό $\mathrm{B}=2n(3m^2+n^2)+8$.

.

Λύση

Έστω $\mathrm{A}=(m+n)^3, \mathrm{B}=2n(3m^2+n^2)+8$. Επειδή $(m+n)^3 \mid 2n(3m^2+n^2)+8$ πρέπει να είναι:

$$(m+n)^3\leq 2n(3m^2+n^2)+8 \Leftrightarrow m^3+3m^2n+3mn^2+n^3\leq 6m^2n+2n^3+8$$

$$\Leftrightarrow m^3-3m^2n+3mn^2-n^3\leq 8 \Leftrightarrow (m-n)^3\leq 8 \overset{m\geq n}{\Longleftrightarrow} m-n\leq 2 \Leftrightarrow m-n\in\{0,1,2\}.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $m-n=0\Leftrightarrow m=n.$ Τότε $\mathrm{A}=8m^3, \mathrm{B}=8m^3+8$, οπότε
  $\mathrm{A}\mid \mathrm{B}\Leftrightarrow 8m^3 \mid 8m^3+8 \Leftrightarrow 8m^3 \mid 8 \Leftrightarrow m=1,$ αφού $m>0 \Rightarrow (m,n)=(1,1).$
- $m-n=1$. Τότε έχουμε

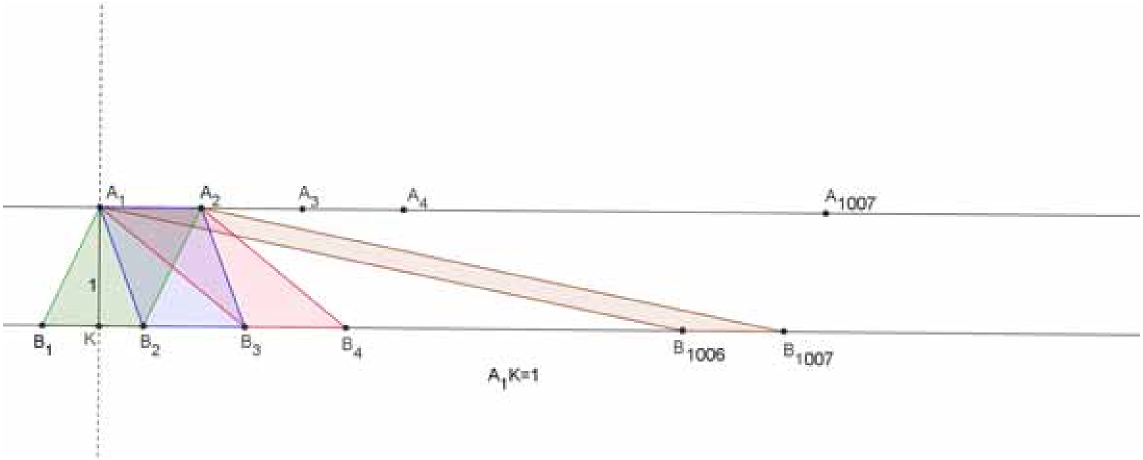
$$\mathrm{A}=(2n+1)^3,\mathrm{B}=2n\left(3(n+1)^2+n^2\right)+8=8n^3+12n^2+6n+8=(2n+1)^3+7.$$

Επομένως, $\mathrm{A}|\mathrm{B} \Leftrightarrow (2n+1)^3|7 \Rightarrow 2n+1=1 \Leftrightarrow n=0,\ m=1$ και $(m,n)=(1,0)$.

- $m-n=2$. Τότε $\mathrm{A}=8(n+1)^3=\mathrm{B}$, οπότε έχουμε άπειρα ζεύγη λύσεων της μορφής $(k+2,k)$, με $k\geq 0$.

Πρόβλημα 3.
Είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε κατάλληλα στο επίπεδο 2014 σημεία, έτσι ώστε με κορυφές από αυτά τα σημεία να κατασκευάσουμε 1006^2 παραλληλόγραμμα εμβαδού 1;

Λύση
Θα αποδείξουμε ότι είναι δυνατόν. Παίρνουμε δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ που να έχουν απόσταση 1. Τοποθετούμε σε κάθε μία από αυτές από 1007 σημεία ώστε τα οποία να απέχουν μεταξύ τους απόσταση 1. Τότε στην ε_1 έχουμε 1006 μοναδιαία τμήματα και στην ε_2 έχουμε 1006 μοναδιαία τμήματα. Οποιοδήποτε μοναδιαίο τμήμα της ε_1 με οποιοδήποτε μοναδιαίο τμήμα της ε_2 δημιουργούν ένα παραλληλόγραμμο εμβαδού 1. Επομένως, συνολικά τα παραλληλόγραμμα εμβαδού 1 είναι: $1006\cdot 1006=1006^2$.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}\leq \mathrm{A\Gamma}$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $c(\mathrm{O},R)$. Η κάθετη από την κορυφή Α προς την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ την τέμνει στο σημείο Δ.

(α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$.

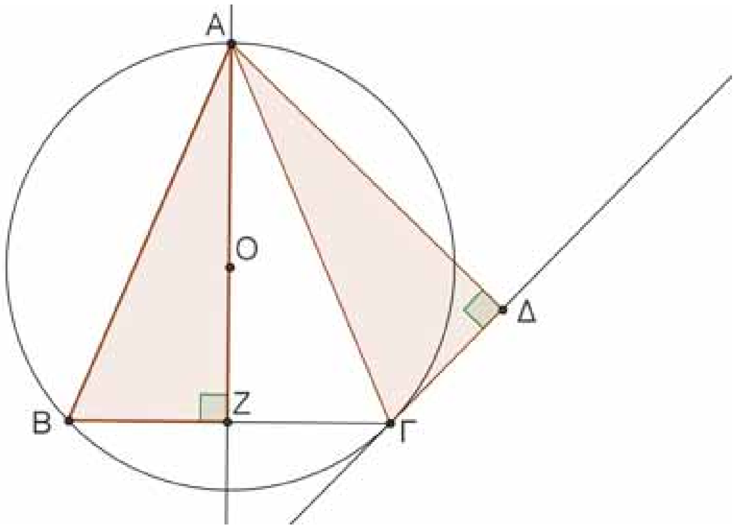
(β) Αν ισχύει ότι $\Gamma\Delta=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Λύση
(α) Αν Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε η ΑΖ είναι ύψος και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΖ και ΑΓΔ είναι ίσα, γιατί έχουν:

- ΑΓ κοινή πλευρά (υποτείνουσα)

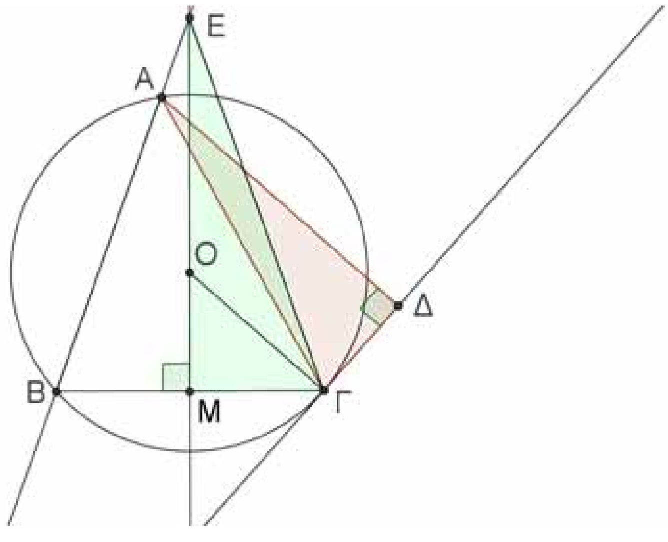
- $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}Z$, αφού $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{B}\Gamma$ (γωνία χορδής – εφαπτομένης και αντίστοιχη εγγεγραμμένη) και $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}Z$, αφού $AB = A\Gamma$.

Επομένως θα είναι και $\Gamma\Delta = \Gamma Z = \dfrac{B\Gamma}{2}$.



Σχήμα 2

(β) Ας υποθέσουμε ότι $AB < A\Gamma$. Θεωρούμε τη μεσοκάθετο στο μέσο M της $B\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της AB στο E. Τότε $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Delta$ (γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης), και επιπλέον από την εκφώνηση έχουμε ότι $2\Gamma\Delta = B\Gamma = 2BM$, οπότε $\Gamma\Delta = BM$. Επομένως, τα ορθογώνια τρίγωνα EBM και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα, οπότε θα είναι $A\Gamma = EB$. Όμως $EB = E\Gamma$, οπότε $A\Gamma = E\Gamma$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού η γωνία $E\hat{A}\Gamma = 180° - \hat{A}$ είναι αμβλεία, οπότε το τρίγωνο $EA\Gamma$ θα είχε δύο αμβλείες γωνίες. Επομένως, θα είναι $AB = A\Gamma$ και το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισοσκελές.



Σχήμα 3

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
32η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
28 Φεβρουαρίου 2015

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Οι λύσεις που δίνονται παρακάτω δεν είναι μοναδικές. Στα περισσότερα προβλήματα έχουν δοθεί και άλλες λύσεις από τους μαθητές που είναι τεκμηριωμένες και ως εκ τούτου αποδεκτές.

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες θετικών ακέραιων (x, y, p), όπου p πρώτος, οι οποίες ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{xy^3}{x+y} = p.$$

Λύση

Έστω $d = (x, y)$ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών x, y. Τότε υπάρχουν θετικοί ακέραιοι a, b τέτοιοι ώστε

$$x = da,\ y = db,\ (a,b) = 1.$$

Με αντικατάσταση στη δεδομένη εξίσωση παίρνουμε:

$$\frac{d^3ab^3}{a+b} = p. \qquad (1)$$

Όμως, από τη σχέση $(a,b)=1$, έχουμε ότι $(a, a+b)=1$ και $(b^3, a+b)=1$, οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $a+b \mid d^3$. Γράφουμε

$$\frac{d^3}{a+b} = k, \qquad (2)$$

όπου k θετικός ακέραιος. Τότε η (1) γίνεται: $kab^3 = p$, οπότε $b^3 \mid p$. Επομένως πρέπει $b=1$ και $ka = p$. Επομένως , έχουμε δύο περιπτώσεις:

(i) $k = p, a = 1$, τότε η (2) γίνεται $\dfrac{d^3}{2} = p$, οπότε $2p = d^3$, οπότε $2 \mid d$ άρα $8 \mid d^3$ και έπεται ότι $8 \mid 2p$, άτοπο.

(ii) $k = 1, a = p$. Τότε η (2) γίνεται $d^3 = p+1 \Rightarrow d^3 - 1 = p \Rightarrow (d-1)(d^2+d+1) = p$. Επομένως, έχουμε ότι $d-1=1, d^2+d+1=p$ (αφού $d^2+d+1 > d-1$), $\Leftrightarrow d=2, p=7$, από όπου έχουμε: $(x, y, p) = (14, 2, 7)$.

Πρόβλημα 2

Έστω $P(x) = ax^3 + (b-a)x^2 - (c+b)x + c$ και $Q(x) = x^4 + (b-1)x^3 + (a-b)x^2 - (c+a)x + c$ πολυώνυμα μεταβλητής x, όπου a, b, c είναι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και

$b>0$. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει τρεις άνισες πραγματικές ρίζες x_0, x_1, x_2, οι οποίες είναι ρίζες και του πολυωνύμου $Q(x)$, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι: $abc > 28$.

(β) Αν a,b,c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι με $b>0$, ποιες είναι οι δυνατές τιμές τους;

Λύση

(α) Επειδή το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου $P(x)$ ισούται με 0 έπεται ότι μία ρίζα του είναι το 1, οπότε έχουμε

$$P(x)=ax^3+(b-a)x^2-(c+b)x+c=(x-1)(ax^2+bx-c)$$

Αν θέσουμε $x_0=1$, από τους τύπους Vieta έχουμε:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \text{ και } x_1x_2=-\frac{c}{a}\neq 0, \qquad (1)$$

οπότε θα είναι $x_1, x_2 \neq 0$.

Επιπλέον, από την υπόθεση έπεται ότι οι x_0, x_1, x_2 θα είναι ρίζες και του πολυωνύμου

$$\begin{aligned} F(x)=Q(x)-P(x)&=x^4+(b-a-1)x^3+2(a-b)x^2+(b-a)x \\ &=x\left(x^3+(b-a-1)x^2+2(a-b)x+b-a\right) \\ &=x\left[x^3-x^2+(b-a)(x^2-x)+(a-b)(x-1)\right] \\ &=x(x-1)\left[x^2+(b-a)x+(a-b)\right]. \end{aligned}$$

Επειδή $F(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$ ή $x^2+(b-a)x+(a-b)=0$ και $x_0,x_1,x_2\neq 0$, έπεται ότι:

$$x_0=1,\ x_1+x_2=a-b,\ \ x_1x_2=a-b\ . \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$a-b=-\frac{b}{a}=-\frac{c}{a}\Rightarrow$$

$$b=c \qquad (3) \qquad \text{και} \qquad a^2-ab=-b \qquad (4)$$

Από τις (3) και (4) έχουμε:

$$a^2=b(a-1)\Rightarrow a>1 \text{ (αφού } b>0) \text{ και } b=c=\frac{a^2}{a-1}.$$

Έχουμε ότι

$$abc=a\left(\frac{a^2}{a-1}\right)^2=\frac{a^5}{(a-1)^2}\overset{x=a-1>0}{=}\frac{(x+1)^5}{x^2}=\frac{x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1}{x^2}$$

$$\Rightarrow abc=x^3+\left(5x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(10x+\frac{5}{x}\right)+10. \qquad (5)$$

Όμως ισχύουν:

- $x^3>0,\ 5x^2+\dfrac{1}{x^2}>4 \Leftrightarrow 5x^4-4x^2+1>0 \Leftrightarrow x^4+(2x^2-1)^2>0,$ ισχύει,
- $10x+\dfrac{5}{x}>14 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} 10x^2-14x+5>0,$ ισχύει αφού $\Delta=-4<0.$

Άρα από τη σχέση (5) έχουμε: $abc>28$.

(β) Από το ερώτημα (α) και τη σχέση $b = a + 1 + \dfrac{1}{a-1}$, επειδή οι αριθμοί $b,\ a+1$ είναι ακέραιοι, προκύπτει ότι και ο αριθμός $\dfrac{1}{a-1} \in \mathbb{Z}$, οπότε πρέπει:

$$a - 1 = \pm 1 \Leftrightarrow a = 0\,(\text{απορρίπτεται, γιατί } a \neq 0) \quad \text{ή} \quad a = 2.\ \text{Τότε } b = c = \frac{a^2}{a-1} = 4.$$

Για τις τιμές αυτές το πολυώνυμο

$$P(x) = ax^3 + (b-a)x^2 - (c+b)x + c = 2x^3 + 2x^2 - 8x + 4 = 2(x-1)\left(x^2 + 2x - 2\right)$$

έχει ρίζες $x_0 = 1,\ x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$ οι οποίες είναι ρίζες και του πολυωνύμου

$$F(x) = Q(x) - P(x) = x(x-1)\left(x^2 + (b-a)x + (a-b)\right) = x\left(x^2 + 2x - 2\right),$$

οπότε θα είναι ρίζες και του πολυωνύμου $Q(x) = F(x) + P(x)$.

Πρόβλημα 3

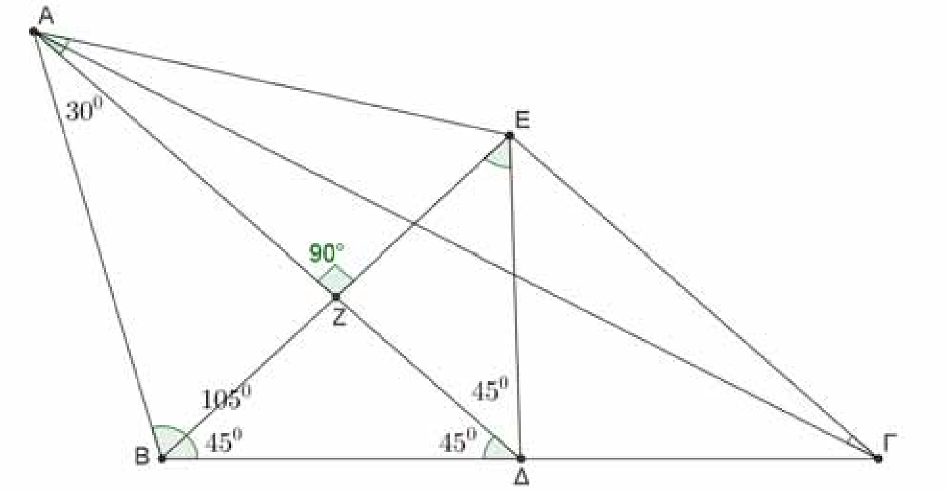
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\text{B}} = 105^\circ$. Έστω Δ σημείο της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε $\text{B}\hat{\Delta}\text{A} = 45^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Αν το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε $\hat{\Gamma} = 30^\circ$

(β) Αν $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, τότε το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

Λύση (1ος τρόπος)

Ευθύ. Έστω ότι το Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι: $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.



Σχήμα 1

Παρατηρούμε ότι $\text{B}\hat{\text{A}}\Delta = 180^\circ - \left(105^\circ + 45^\circ\right) = 30^\circ$. Έστω Ε το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία ΑΔ και έστω Ζ το μέσο της ΒΕ. Τότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΕ και $\text{B}\hat{\text{A}}\text{E} = 2 \cdot \text{B}\hat{\text{A}}\Delta = 60^\circ$. Άρα το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισόπλευρο, οπότε

$$\text{AB} = \text{BE} = \text{AE} \qquad (1)$$

$$\text{A}\hat{\text{B}}\text{E} = \text{A}\hat{\text{E}}\text{B} = 60^\circ \qquad (2)$$

Τότε, από το τρίγωνο ΒΖΔ με $\text{B}\hat{\text{Z}}\Delta = 90^\circ$, έχουμε: $\Delta\text{BZ} = 45^\circ$.

Επιπλέον, στο τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε, λόγω συμμετρίας, ότι η διάμεσος ΕΔ ισούται με

$$E\Delta = \Delta B = \frac{B\Gamma}{2}.$$

Άρα το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές με

$$E\hat{B}\Gamma = 45^\circ \text{ και } BE = E\Gamma. \qquad (3)$$

Επομένως το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές $B\hat{E}\Gamma = 90^\circ$. Επειδή είναι και $A\hat{Z}E = 90^\circ$, έπεται ότι: $A\Delta \parallel E\Gamma$. Τότε προκύπτει η ισότητα των γωνιών

$$\Delta\hat{A}\Gamma = E\hat{\Gamma}A \qquad (4)$$

Επιπλέον, από τις ισότητες (1) και (3) λαμβάνουμε ότι $AE = E\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές με

$$E\hat{\Gamma}A = E\hat{A}\Gamma \qquad (5)$$

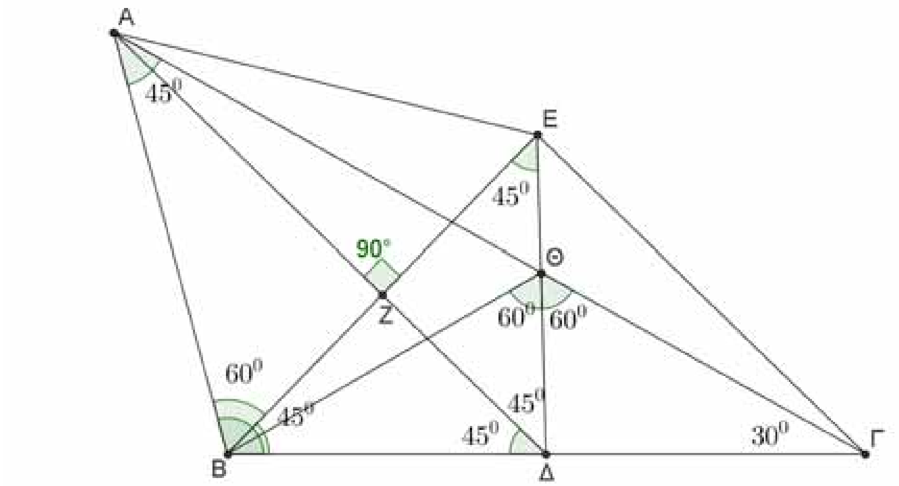
Από τις σχέσεις (4) και (5) λαμβάνουμε

$$\Delta\hat{A}\Gamma = E\hat{A}\Gamma = \frac{\Delta\hat{A}E}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ,$$

οπότε από το τρίγωνο ΑΒΓ προκύπτει ότι:

$$\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{B} - \left(B\hat{A}\Delta + \Delta\hat{A}\Gamma\right) = 180^\circ - 105^\circ - \left(30^\circ + 15^\circ\right) = 30^\circ.$$

Αντίστροφο. Έστω ότι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Θα αποδείξουμε ότι το Μ είναι το μέσο της ΒΓ.



Σχήμα 2

Παρατηρούμε ότι $B\hat{A}\Delta = 180^\circ - \left(105^\circ + 45^\circ\right) = 30^\circ$ και $B\hat{A}\Gamma = 45^\circ$. Έστω Ε το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία ΑΔ και έστω Ζ το μέσο της ΑΕ. Τότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με $AB = AE$ και $B\hat{A}E = 2 \cdot B\hat{A}\Delta = 60^\circ$. Άρα το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισόπλευρο, οπότε

$$AB = BE = AE \qquad (1)$$

$$A\hat{B}E = A\hat{E}B = B\hat{A}E = 60^\circ \qquad (2)$$

Τότε, από το τρίγωνο ΒΖΔ με $B\hat{Z}\Delta = 90^\circ$, έχουμε: $\Delta BZ = 45^\circ$.
Επιπλέον, λόγω συμμετρίας έχουμε

$$B\hat{E}\Delta = \Delta\hat{B}Z = 45^\circ, \qquad (3)$$

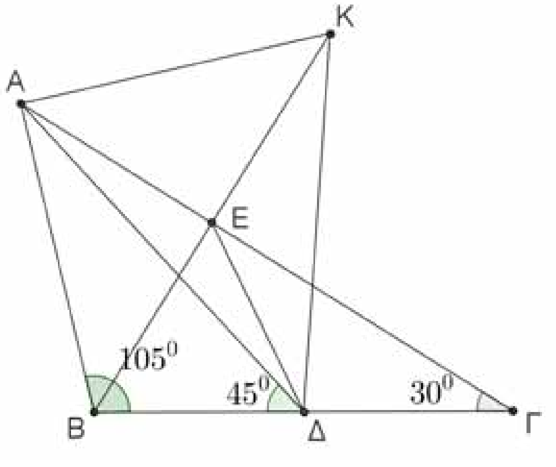
$$E\hat{\Delta}B = 2 \cdot Z\hat{\Delta}B = 90^\circ. \qquad (4)$$

Έστω Θ το σημείο τομής της ΔΕ με την ΑΓ. Τότε, από τη σχέση (4) προκύπτει ότι το ΘΔ είναι **ύψος** του τριγώνου ΒΘΓ.

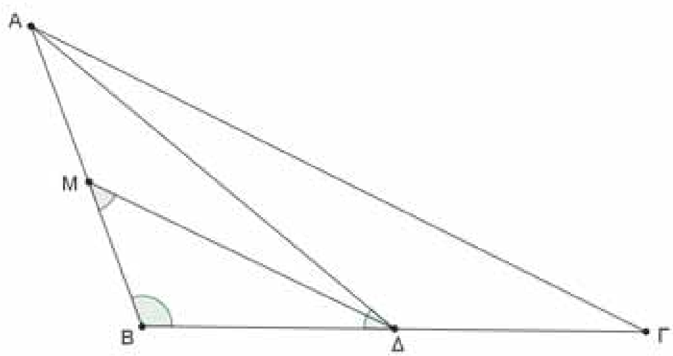
Επιπλέον, από τη σχέση (3) λαμβάνουμε $B\hat{E}\Theta = B\hat{E}\Delta = 45^\circ = B\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Theta$, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΘΕ είναι εγγράψιμο. Άρα έχουμε $B\hat{\Theta}\Delta = B\hat{A}E = 60^\circ$ και $\Delta\hat{\Theta}\Gamma = A\hat{\Theta}E = A\hat{B}E = 60^\circ$. Επομένως είναι $B\hat{\Theta}\Delta = \Delta\hat{\Theta}\Gamma = 60^\circ$, οπότε η ΘΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Theta}\Gamma$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η ΘΔ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ΒΘΓ, οπότε το τρίγωνο ΒΘΓ είναι ισοσκελές και θα έχει τη ΘΔ διάμεσο, δηλαδή το Δ είναι το μέσο της ΒΓ.

2^{ος} τρόπος

(α) Υποθέτουμε πρώτα ότι $\hat{\Gamma} = 30°$ (σχήμα 3). Θεωρούμε το συμμετρικό Κ του Β ως προς την ευθεία ΑΓ και έστω ότι η ΚΒ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Τότε έχουμε ότι $K\hat{B}\Gamma = 60°$, οπότε $A\hat{B}E = 45°$, επομένως $A\hat{K}B = 45°$ και το τρίγωνο ΒΑΚ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Ισχύει επομένως ότι $A\hat{\Delta}B = A\hat{K}B = 45°$, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΔΚ είναι εγγράψιμο. Αν η ΚΒ τέμνει την ΑΓ στο Ε, τότε ισχύει ΕΑ = ΕΒ = ΕΚ, άρα το Ε είναι το κέντρο του κύκλου, άρα ΕΔ = ΕΒ, και αφού $K\hat{B}\Gamma = 60°$, το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισόπλευρο, άρα ΕΒ = ΕΔ (1). Επιπλέον, θα είναι $\Delta\hat{E}\Gamma = 30°$, άρα το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισοσκελές, οπότε ΔΕ = ΔΓ (2). Από τις (1),(2) έχουμε ότι ΔΒ = ΔΓ.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι Δ μέσον του ΒΓ (σχήμα 4). Θεωρούμε σημείο Μ του ΑΒ τέτοιο ώστε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Delta = 45°$. Τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το (α) στο τρίγωνο $\mathrm{AB}\Delta$, αφού $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 30°$, οπότε το σημείο Μ είναι μέσον του ΑΒ, οπότε $\Delta\mathrm{M} // \mathrm{A}\Gamma$. Επομένως $\hat{\Gamma} = \mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{M} = 180^\circ - \left(105^\circ + 45^\circ\right) = 30^\circ$

3ος τρόπος (τριγωνομετρικά):

Έστω ότι η γωνία $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = x$. Από το νόμο ημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$\frac{\mathrm{B}\Delta}{\eta\mu 30°} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\eta\mu 105°} \Rightarrow \mathrm{B}\Delta = \frac{\mathrm{A}\Delta}{2\eta\mu 105°}.$$

Όμοια από το νόμο ημιτόνων στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε: $\Delta\Gamma = \dfrac{\mathrm{A}\Delta\,\eta\mu(45° - x)}{\eta\mu x}$.

Επομένως, το Δ είναι μέσο αν και μόνο αν:

$$\frac{\mathrm{A}\Delta\,\eta\mu(45° - x)}{\eta\mu x} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{2\eta\mu 105°} \Leftrightarrow 2\eta\mu 105°\eta\mu 45°(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) = \eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu 105°\eta\mu 45°\sigma\upsilon\nu x = (1 + 2\eta\mu 105°\eta\mu 45°)\eta\mu x$$

Όμως ισχύει ότι:

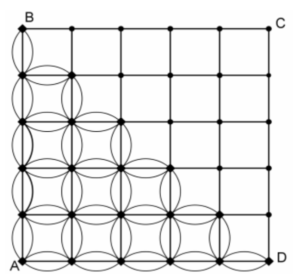
$$2\eta\mu 45°\eta\mu 105° = 2\eta\mu 45°\eta\mu\left(60^\circ + 45^\circ\right) = (\eta\mu 45°)^2(\eta\mu 60° + \sigma\upsilon\nu 60°) = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

οπότε η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2}} = \varepsilon\varphi x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})} = \varepsilon\varphi x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \frac{1}{\sqrt{3}} \overset{x<45°}{\Leftrightarrow} x = 30° \cdot$$

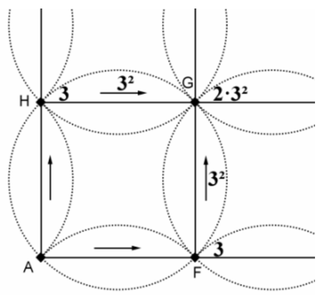
Πρόβλημα 4

Τετράγωνο $ABCD$ διαιρείται σε n^2 ίσα μικρά (στοιχειώδη) τετράγωνα, σχεδιάζοντας ευθείες παράλληλες στις πλευρές του (στο σχήμα φαίνεται η περίπτωση για $n = 5$). Τα σημεία που πλέγματος που βρίσκονται στις πλευρές και το εσωτερικό του τριγώνου ABD συνδέονται μεταξύ τους και με δύο τόξα κύκλων. Ξεκινώντας από το σημείο A, κινούμαστε προς τα δεξιά και προς τα άνω (η κίνηση γίνεται επάνω στα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζουν τα στοιχειώδη τετράγωνα και τα τόξα των κύκλων). Πόσες είναι οι δυνατές διαδρομές από το σημείο A μέχρι το σημείο C;



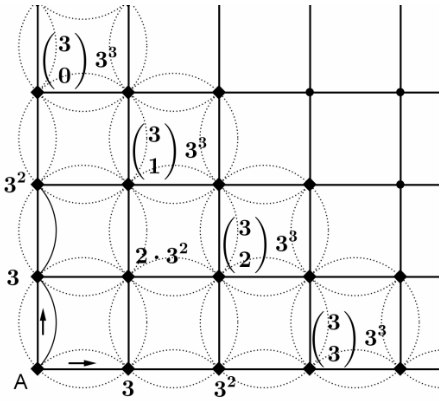
Λύση

Υποθέτουμε ότι το τετράγωνο είναι τοποθετημένο σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς με αρχή το σημείο A και τους άξονες να ταυτίζονται



Σχήμα 5

με τις πλευρές AB και AD. Τότε όλα τα σημεία του πλέγματος θα έχουν θετικές ακέραιες συντεταγμένες.
Παρατηρούμε (Σχήμα 1) ότι το σημείο $F(1,0)$, μπορούμε να το προσεγγίσουμε (από το σημείο $A(0,0)$) με 3 τρόπους.
Με όμοιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι και το σημείο $H(0,1)$, μπορούμε να το προσεγγίσουμε (από το σημείο $A(0,0)$) με 3 τρόπους.
Το σημείο $G(1,1)$ μπορούμε να το προσεγγίσουμε (από το σημείο $H(0,1)$) με 3 τρόπους. Άρα το σημείο $G(1,1)$ μπορούμε να το προσεγγίσουμε (από το σημείο $\mathrm{A}(0,0)$) με 3^2 τρόπους (πολλαπλασιαστική αρχή), ακλουθώντας τη διαδρομή A,H,G.
Με όμοιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι οι δυνατοί τρόποι προσέγγισης του σημείου $G(1,1)$ (ακλουθώντας τη διαδρομή A,F,G) είναι 3^2 τρόποι.
Άρα τελικά όλοι οι δυνατοί τρόποι προσέγγισης του σημείου $G(1,1)$ είναι $2\cdot 3^2$.



Σχήμα 6

Κάθε λοιπόν σημείο του πλέγματος $M(i,j)$ (που βρίσκεται στις πλευρές και το εσωτερικό του τριγώνου ABD) μπορούμε να το προσεγγίσουμε με $\binom{i+j}{i}\cdot 3^{i+j}=\binom{i+j}{j}\cdot 3^{i+j}$ τρόπους (από το σημείο $\mathrm{A}(0,0)$).
Τα σημεία του πλέγματος που βρίσκονται επάνω στη διαγώνιο BD (δηλ τα σημεία $(0,n),(1,n-1)),\ (2,n-2),....,(n-1,1),(n,0)$ μπορούμε να τα προσεγγίσουμε με $\binom{n}{0}\cdot 3^n,\binom{n}{1}\cdot 3^n,\binom{n}{2}\cdot 3^n,....,\binom{n}{n-1}\cdot 3^n,\binom{n}{n}\cdot 3^n$ τρόπους αντίστοιχα.
Τα υπόλοιπα σημεία του πλέγματος (δηλαδή τα σημεία του πλέγματος που δεν βρίσκονται στις πλευρές και το εσωτερικό του τριγώνου ABD), συνδέονται μεταξύ τους μόνο με ευθύγραμμα τμήματα. Η μετακίνηση από το σημείο (i,j) στο σημείο $(i+k,j+m)$ του πλέγματος (κινούμενοι προς τα δεξιά και άνω), μπορεί να γίνει με $\binom{k+m}{k}=\binom{k+m}{m}$ τρόπους.

Άρα η μετακίνηση από το σημείο $(0,n)$ στο σημείο (n,n) μπορεί να γίνει με $\binom{n}{0}$ τρόπους.

Η μετακίνηση από το σημείο $(1,n-1)$ στο σημείο (n,n) μπορεί να γίνει με $\binom{n}{1}$ τρόπους.

Η μετακίνηση από το σημείο $(2,n-2)$ στο σημείο (n,n) μπορεί να γίνει με $\binom{n}{2}$ τρόπους.

. . . .

Η μετακίνηση από το σημείο $(n-1,1)$ στο σημείο (n,n) μπορεί να γίνει με $\binom{n}{n-1}$ τρόπους.

Η μετακίνηση από το σημείο $(n,0)$ στο σημείο (n,n) μπορεί να γίνει με $\binom{n}{n}$ τρόπους.

Άρα το σημείο $C(n,n)$, μπορεί να προσεγγιστεί από το σημείο A με:

$$3^n\left(\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n-1}^2+\binom{n}{n}^2\right)=3^n\binom{2n}{n} \text{ τρόπους.}$$

2^{ος} τρόπος

Αν δεν υπήρχαν τα τόξα των κύκλων, έχουμε $\binom{n+n}{n}$ διαφορετικές διαδρομές για να πάμε από το A στο C.

Πράγματι, από τα συνολικά $2n$ βήματα που πρέπει να κάνουμε είτε δεξιά είτε πάνω, σε ακριβώς n πρέπει να πάμε δεξιά και σε ακριβώς n πρέπει να πάμε πάνω. Αν επομένως σταθεροποιήσουμε τα βήματα στα οποία πάμε δεξιά, τότε προσδιορίζεται όλη η διαδρομή. Επομένως πρέπει να επιλέξουμε τα n βήματα από τα συνολικά $2n$. Αυτό γίνεται με $\binom{2n}{n}$ τρόπους.

Τώρα, κάθε σημείο της διαγωνίου BD είναι της μορφής $(k,n-k)$, οπότε για να φτάσουμε σε καθένα από αυτά χρειαζόμαστε ακριβώς $k+n-k=n$ βήματα.

Με τα τόξα, το μόνο που αλλάζει είναι ότι στα πρώτα n βήματα, δηλαδή ακριβώς στα βήματα πριν τη διαγώνιο, έχω 3 επιλογές για τη μετακίνηση από το ένα σημείο στο άλλο. Δηλαδή για κάθε διαδρομή χωρίς τόξα, έχω 3^n διαδρομές με τμήματα και τόξα. Επομένως αφού οι διαδρομές χωρίς τόξα είναι $\binom{2n}{n}$, με τμήματα και τόξα είναι $3^n\cdot\binom{2n}{n}$.