1.3 Μετασχηματισμοί με ταυτότητες

Θέμα 15 (www.mathematica.gr - Α.Πούλος)**.** *Να λυθεί το σύστημα:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^3 + y^3 = 9 \end{cases}$$

Απόδειξη. Προσπάθησε να το λύσεις:

Πώς συνδέονται το άθροισμα τετραγώνων $x^2 + y^2$ και το άθροισμα κύβων $x^3 + y^3$;

Υπόδειξη 2 □

Θέμα 16. *Να λυθεί το σύστημα:*

Η δεύτερη εξίσωση «θυμίζε» μέρος ταυτότητας

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9a^3 \\ x^2y + xy^2 = 6a^3 \\ x, y \in R, a \neq 0 \end{cases}$$

Απόδειξη. .

Λύση

□

Στην επόμενη θυμηθείτε τους τύπους Vietta

Θέμα 17.

Στη δεύτερη εξίσωση εμφανίζονται το άθροισμα και το γινόμενο των x, y

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 78 \\ xy + (x + y) = 29 \\ x, y \in R \end{cases}$$

Απόδειξη. Υπόδειξη

□

Θέμα 18. *Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις του συστήματος:* Υπόδειξη

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \\ x, y \in R \end{cases}$$

Απάντηση

Θέμα 19. *Να βρεθούν οι λύσεις του συστήματος:* Υπόδειξη

$$\begin{cases} x + y + w = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{w} = 1 \\ xy + yw + wx = 27 \end{cases}$$

Υπόδειξη 2η

3 Γενικές ασκήσεις

ΘΕΜΑ 22 (www.mathematica.gr). *Εδώ Να λυθεί το σύστημα:*

$$\begin{cases} x^2+y=2x \\ y^2+z=2y \\ z^2+t=2z \\ t^2+x=2t \\ x,y,z,t \in R \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 23 (Ευκλείδης Β 2010). *Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα :*

$$\begin{cases} x+y+z=8 \\ x^2+y^2+z^2=26 \\ xy+xz=(yz+1)^2 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 24 (Ευκλείδης Β 2009). *Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (x,y,z) πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:*

$$\begin{cases} x^3+y^3=65z^3 \\ x^2y+xy^2=20z^3 \\ x-y+2z=10 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 25 (Ευκλείδης Β 2008). *Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα:*

$$\begin{cases} x^2+4y^2=4\alpha^2 \\ \alpha x-y=2\alpha \end{cases}$$

έχει μία μόνο λύση. Για τις τιμές του α που θα βρείτε, να λύσετε το σύστημα.

ΘΕΜΑ 26 (Ευκλείδης Β 2004). *Οι πραγματικοί αριθμοί x,y,z ικανοποιούν τις σχέσεις: (Σ) :*

$$\begin{cases} x+y+z=16 \\ x^2+y^2+z^2=96 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι και οι τρεις ανήκουν στο διάστημα $\left[\frac{8}{3},\frac{26}{3}\right]$.

β) Αν $x,y,z \in \mathbb{Z}$ με $x \le y \le z$, να βρείτε τις τριάδες (x,y,z) που είναι λύσεις του (Σ)

ΘΕΜΑ 27 (Ευκλείδης Β 2001). *Να βρείτε όλες τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα (Σ) :*

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x \le 1 \\ x-y+\alpha=0 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση και για τις τιμές αυτές να το λύσετε.

ΘΕΜΑ 28 (Θαλής Β 2010). *Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x,y,z ισχύουν οι ισότητες:*

$$\sqrt{x^2-y-z}=x-2$$
$$\sqrt{y^2-z-x}=y-2$$
$$\sqrt{z^2-x-y}=z-2$$

να αποδείξετε ότι $x+y+z=6$ και να προσδιορίσετε τους αριθμούς x,y,z .

ΘΕΜΑ 29 (Ευκλείδης Α 2009). *Οι πραγματικοί αριθμοί x,y και z ικανοποιούν τις ισότητες:*

$$x^3-y^3=26z^3$$
$$x^2y-xy^2=6z^3$$

(α) Να εκφράσετε τους x,y συναρτήσει του z . (β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $x+2y+3z=8$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x,y και z

Υπόδειξη 6. *Υπόδειξη δεύτερη:* $(x+y)^2-2=x^2+y^2$ *και* $x^3+y^3=(x+y)^3-3x^2y-3xy^2=(x+y)^3-3xy(x+y)$ *Δοκίμασε να το λύσεις, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη υπόδειξη.* *Επιστροφή*

Λύση 7.

$$\begin{cases} x^3+y^3=9a^3 \\ x^2y+xy^2=6a^3 \\ x,y\in R, a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=9a^3 \\ 3x^2y+3xy^2=18a^3 \\ x,y\in R, a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3=27a^3 \\ 3x^2y+3xy^2=18a^3 \\ x,y\in R, a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3a \\ xy(x+y)=6a^3 \\ x,y\in R, a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=3a-y \\ (3a-y)y3a=6a^3 \\ x,y\in R, a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3a-y \\ 2a(y-a)-y(y-a)=0 \\ x,y\in R, a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2a \text{ ή } x=a \\ y=a \text{ ή } x=2a \\ x,y\in R, a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y)=(a,2a) \text{ ή } \\ (x,y)=(2a,a) \end{cases}$$

Επιστροφή

Υπόδειξη 8. $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy \Leftrightarrow x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
Επιστροφή

Υπόδειξη 9. $xy\neq 0$ *Επιστροφή*

Υπόδειξη 10. $x=y=6$ *αφού απορριφθούν οι μη ακέραιες λύσεις.* *Επιστροφή*

Υπόδειξη 11. *Μπορεί να βρεθεί και το γινόμενο των* xyw . *Επιστροφή*

Υπόδειξη 12. *Μπορεί να δημιουργηθεί ταυτότητα με έναν άγνωστο μόνο. Απάντηση:* $w=3, x+y=6, xy=9$ *κλπ* *Επιστροφή*