Ανισοτητες 1 .

1 Βασικές Ανισότητες

Μετά την εισαγωγή στις αποδείξεις μέσω των ιδιοτήτων της διάταξης θα εργαστούμε σε μερικές ασκήσεις.

Άσκηση 1. *Να αποδειχθεί ότι:* $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Απόδειξη. 1η υπόδειξη...

Θυμήσου: Όλα τελικά ανάγονται στην $a^2 \geq 0$

□

Ἀπόδειξη. 2η υπόδειξη... ∎

Μπορείς να θυμηθείς κάποια ταυτότητα στην οποία ανάγεται το ζητούμενο;

Απόδειξη. Ανάγουμε την δοθείσα στη γνωστή ταυτότητα:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Θέλουμε να αποδείξουμε: $x^2 + y^2 \geq 2xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$
Αρκεί [1] να αποδείξουμε ότι:

$$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftarrow$$

$$(x-y)^2 \geq 0 \quad \text{Το οποίο είναι γνωστό ότι ισχύει από βασικές ιδιότητες διάταξης.}$$

□

[1] Όταν γράφουμε **αρκεί** να αποδείξουμε ότι στην πραγματικότητα χρησιμοποιούμε τη συνεπαγωγή $\Leftarrow$

Αυτή η μέθοδος απόδειξης αναδεικνύει ότι μπορούμε να ξεκινήσουμε από κάτι γνωστό και με συνεπαγωγές να καταλήξουμε στο ζητούμενο. Στη συγκεκριμένη περίπτωση το γνωστό είναι ότι: $(x-y)^2 \geq 0$. Δηλαδή, θα μπορούσαμε ομοίως, αντί να χρησιμοποιήσουμε το **αρκεί** - την αριστερή συνεπαγωγή - να γράφουμε τον εξής συλλογισμό:

$$\begin{aligned} a^2 \geq 0,\ \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ (x-y)^2 \geq 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ x^2 - 2xy + y^2 \geq 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ x^2 + y^2 \geq 2xy,\ \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \end{aligned}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

Συνεπώς στη χρήση του **αρκεί** δηλαδή στην εκκίνηση της απόδειξης από τη ζητούμενη σχέση, αρκεί να προσέχουμε να ισχύουν οι αριστερές συνεπαγωγές. Η **ισοδυναμία** $\Leftrightarrow$ είναι απαραίτητη όταν επιθυμούμε να δείξουμε και την άλλη κατεύθυνση.

Άσκηση 2. *Να αποδειχθεί ότι:* $2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2$.

Απόδειξη. Εύκολη, όπως στην προηγούμενη άσκηση.

□

Άσκηση 3. *Να αποδειχθεί ότι:* $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Υπενθυμίζεται ότι το σύμβολο $\forall$ σημαίνει ***για κάθε***