Προτυπο Πειραματικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Ανισοτητες 2 .

1 Ανισότητα Αριθμητικού - Γεωμετρικού Μέσου

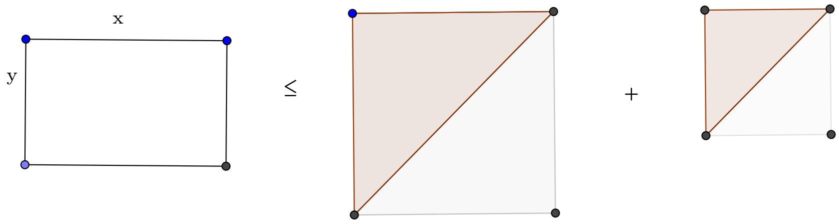
Σε προηγούμενες ασκήσεις αποδείχθηκε ότι:

$$x^2 + y^2 \geq 2xy, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Αποτέλεσμα, το οποίο μετασχηματίζεται εύκολα στο

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq xy, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Ερμηνεύοντας γεωμετρικά, για μη αρνητικούς αριθμούς $x, y \geq 0$, αυτή μας λέει ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου διαστάσεων x, y είναι μικρότερο ίσο από το ημιάθροισμα ή μέσο όρο των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές x και y.



Ενώ, θέτοντας όπου x, y τις ρίζες τους αντίστοιχα: $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ προκύπτει η επόμενη:

Πρόταση 1 (Ανισότητα ΑΜ-ΓΜ). *Ισχύει ότι:*

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \ \forall x, y \geq 0$$

Αυτή γράφεται ισοδύναμα:

$$4\sqrt{xy} \leq 2x + 2y, \ \forall x, y \geq 0$$

Αν x, y μήκη πλευρών ορθογωνίου, τότε το δεξί μέρος της προηγούμενης είναι η περίμετρός του, ενώ $\sqrt{xy}$ είναι το μήκος της πλευράς τετραγώνου ίσου εμβαδού με το ορθογώνιο αυτό, οπότε η ποσότητα: $4\sqrt{xy}$ στο αριστερό μέλος είναι η περίμετρος του τετραγώνου με εμβαδόν ίσο με αυτό του ορθογωνίου. Συνεπώς, ισχύει ότι:

Θεώρημα 1 (Ισοδύναμη ισοπεριμετρική στα ορθογώνια)**.** *Από όλα τα ορθογώνια με σταθερό εμβαδόν E, το τετράγωνο με μήκος πλευράς $\sqrt{E}$ έχει τη μικρότερη περίμετρο.*

ή ακόμα ισοδύναμα:

Θεώρημα 2 (Ισοπεριμετρική ανισότητα στα ορθογώνια). *Από όλα τα ορθογώνια σταθερής περιμέτρου* Π *το τετράγωνο με πλευρά* $\frac{\Pi}{4}$ *έχει το μέγιστο εμβαδόν.*

Δηλαδή, εδώ εκφράζεται η αρμονία της φύσης, αφού από όλα τα ορθογώνια σχήματα με σταθερή περίμετρο, εκείνο που έχει τη μεγαλύτερη συμμετρία περικλύει το μέγιστο εμβαδόν. Ανάλογη συμμετρία ισχύει και στα πεντάγωνα, δηλαδή από όλα τα πεντάγωνα με δεδομένη περίμετρο, εκείνο που έχει το μέγιστο εμβαδόν είναι το ....

Φυσικά, το ίδιο ισχύει και στα τρίγωνα.

Άσκηση 1. *Να διατυπωθεί η ισοπεριμετρική ανισότητα για τρίγωνα.*

Η απόδειξη της ανισότητας αυτής μπορεί να γίνει με χρήση του επόμενου θεωρήματος. Υπόδειξη

Θεώρημα 3 (Ανισότητα ΑΜ - ΓΜ). *Για κάθε* $x, y, z \geq 0$ *ισχύουν:*
α) $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$
β) $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$

Απόδειξη. Υπόδειξη: για την απόδειξη του α) μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ταυτότητα του Euler:

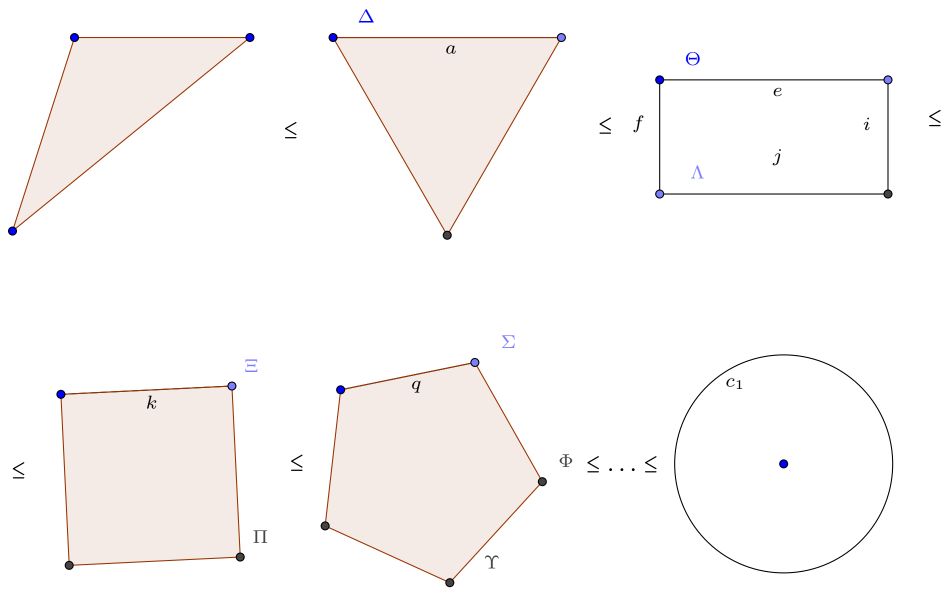
$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right]$$

Απόδειξη

β) Η απόδειξη του β) μπορεί να γίνει με κατάλληλη αντικατάσταση χρησιμοποιώντας το α). □

Γενικότερα, η «συμμετρία» της φύσης, εκφραζόμενη, δια μέσου των μαθηματικών, επιβάλλει την εξής:

Θεώρημα 4 (Ισοπεριμετρική ανισότητα). *Από όλα τα επίπεδα σχήματα γνωστής περιμέτρου* Π *ο κύκλος περικλύει το μέγιστο εμβαδόν.*



Θέμα 1. *Να αποδειχθούν οι ανισότητες: α)* $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, *για* x, y *ομόσημοι.*
β) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq -2$, *για* x, y *ετερόσημοι.*

Θέμα 2. *Να αποδειχθεί ότι:*

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz, \quad \forall x, y, z \geq 0$$

Υπόδειξη 1

Θέμα 3. *Να αποδειχθεί ότι:*

$$\left(x+\frac{y}{zx}\right)\left(y+\frac{z}{xy}\right)\left(z+\frac{x}{yz}\right)\geq 8,\ \forall x,y,z\geq 0$$

Υπόδειξη

Θέμα 4. *Να αποδειχθεί ότι:*

$$(a)\ x^3+y^3\geq xy(x+y),\ \forall x,y\geq 0$$

Ανισότητες και ταυτότητες

[Ευκλείδης Α 2002] Να αποδειχθεί ότι:

$$(b)\ \frac{1}{x^3+y^3+xyz}+\frac{1}{y^3+z^3+xyz}+\frac{1}{z^3+x^3+xyz}\leq\frac{1}{xyz},\ \forall x,y,z>0$$

Θέμα 5. *Αν $x,y,z>0$ και $(1+x)(1+y)(1+z)=8$ να βρεθεί η μέγιστη τιμή*[1] *του γινομένου xyz.*

[1] Για τη μέγιστη τιμή μίας παράστασης Α, αρκεί να δείξουμε ότι $A\leq a$ και ότι η Α λαμβάνει την τιμή a.

Υπόδειξη 1 Υπόδειξη 2

Θέμα 6 (Ευκλείδης Α - 2004)**.** *Έστω b,c τα μήκη των καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα a . Να δειχθεί ότι: $b^4+b^2c^2+c^4\geq\frac{3}{4}a^4$.* *Υπόδειξη 1*

Θέμα 7 (Ευκλείδης Α - 2005)**.** *Οι αριθμοί α και β είναι θετικοί και ισχύει $\alpha+\beta=\lambda$. Να δειχτεί ότι:*

Χρησιμοποιείστε βασικές ιδιότητες

$$\frac{4}{3\lambda}\leq\frac{1}{\alpha+\lambda}+\frac{1}{\beta+\lambda}<\frac{3}{2\lambda}$$

Λύση

Θέμα 8 (Ευκλείδης Α - 2008)**.** *Αν οι αριθμοί x,y,z είναι τέτοιοι ώστε: $x>0, y+1>0, z+2>0$ και $x+y+z=3$, να αποδείξετε ότι:*

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1}+\frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3}+\frac{x(z+2)}{x+z+2}\leq 3.$$

Για ποιες τιμές των x,y,z ισχύει η ισότητα;

Υπόδειξη
Λύση

Θέμα 9 (Αρχιμήδης 2010)**.** *Αν a,b,c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 6, να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή της παράστασης:*

$$S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}.$$

Λύση

Θέμα 10 (Ανισότητα ΑΜ-ΓΜ-ΑΜ)**.** *Αριθμητικού Μέσου - Γεωμετρικού Μέσου - Αρμονικού Μέσου*
Να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}\geq\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}},\ \forall x,y,z>0$$

Θέμα 11. *α) Αν $x,y,z\geq 0$, να αποδειχθεί ότι:*

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$$

β) Αν $x,y,z\geq 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)\geq 9xyz$$

γ)Αν $x,y,z\geq 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)\geq 9xyz$$

2 Λύσεις ασκήσεων Πρώτου μέρους

Θέμα 12. *Να αποδειχθεί ότι:*

$$(a+b)^2 \geq 4ab,\ \forall a,b \in \mathbb{R}$$

Λύση 1.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 \geq 4ab,\ \forall a,b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow\\ a^2+2ab+b^2 \geq 4ab,\ \forall a,b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow\\ a^2-2ab+b^2 \geq 0,\ \forall a,b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow\\ (a-b)^2 \geq 0,\ \forall a,b \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

το οποίο ισχύει.

Θέμα 13. *Να αποδειχθεί ότι:*

$$2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2,\ \forall a,b \in \mathbb{R}$$

Λύση 2.

$$\begin{aligned}2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2,\ \forall a,b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow\\ 2a^2+2b^2 \geq a^2+2ab+b^2,\ \forall a,b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow\\ 2a^2+2b^2-a^2-b^2-2ab \geq 0,\ \forall a,b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow\\ a^2+b^2-2ab \geq 0,\ \forall a,b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow\\ (a-b)^2 \geq 0\end{aligned}$$

το οποίο ισχύει.

Θέμα 14. *Να αποδειχθεί ότι:*

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$$

Λύση 3.

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow\\ 2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2bc+2ca,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow\\ a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2 \geq 0,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow\\ (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geq 0,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

το οποίο ισχύει διότι άθροισμα τετραγώνων πραγματικών αριθμών είναι μη αρνητικό:

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \geq 0,\ \forall a_1,a_2,\ldots a_n, \in \mathbb{R}$$

Θέμα 15. *Να αποδειχθεί ότι:*

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$$

Λύση 4.

$$\begin{aligned}3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow\\ 3a^2+3b^2+3c^2 \geq a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow\\ 2a^2+2b^2+3c^2 \geq 2ab+2ac+bc,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow\\ a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

το οποίο ισχύει από προηγούμενη άσκηση.

3 Υποδείξεις - Λύσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι διαδοχικές υποδείξεις για την επεξεργασία και αναζήτηση των ασκήσεων.

Υπόδειξη 5. *κανονικό πεντάγωνο* *Επιστροφή*

Υπόδειξη 6. *Μία ιστορική προσέγγιση του ισοπεριμετρικού προβλήματος μπορεί να βρει κάποιος εδώ.* *Επιστροφή*

Υπόδειξη 7. *Ισχύει ότι:* $\frac{1+x}{2} \geq \sqrt{x \cdot 1}$ *Επιστροφή*

Υπόδειξη 8. *Ανισότητα ΑΜ- ΓΜ τρεις φορές* *Επιστροφή*

Υπόδειξη 9. *Πρέπει να συσχετίσουμε τα γινόμενα* $(1+x)(1+y)(1+z)$ *και* xyz.
Επιστροφή

Υπόδειξη 10. $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ *Επιστροφή*

Υπόδειξη 11. *Αριθμητές και παρονομαστές συνδέονται με ανισότητα ΑΜ-ΓΜ.*
Επιστροφή

Υπόδειξη 12.

$$a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right] \geq 0,\ \text{για } a,b,c \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc \geq 0 \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$$

Επιστροφή

Υπόδειξη 13. *Χρησιμοποίησε τις ιδιότητες ορθογωνίου τριγώνου.*
Επιστροφή

Υπόδειξη 14.

$$\frac{4}{3\lambda} \leq \frac{1}{\alpha+\lambda} + \frac{1}{\beta+\lambda} < \frac{3}{2\lambda} \Leftrightarrow \frac{4}{3\lambda} \leq \frac{\beta+\lambda+\alpha+\lambda}{(\alpha+\lambda)(\beta+\lambda)} < \frac{3}{2\lambda} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{3\lambda} \leq \frac{\alpha+\beta+2\lambda}{\alpha\beta+\alpha\lambda+\beta\lambda+\lambda^2} < \frac{3}{2\lambda} \Leftrightarrow \frac{4}{3\lambda} \leq \frac{3\lambda}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)\lambda+\lambda^2} < \frac{3}{2\lambda} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{3\lambda} \leq \frac{3\lambda}{\alpha\beta+2\lambda^2} < \frac{3}{2\lambda}$$

Για την αριστερή ανισότητα έχουμε:

$$\frac{4}{3\lambda} \leq \frac{3\lambda}{\alpha\beta+2\lambda^2} \underset{\alpha\beta>0}{\overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow}} 4\alpha\beta+8\lambda^2 \leq 9\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \geq 0$$

που ισχύει.
Για τη δεξιά ανισότητα έχουμε:

$$\frac{3\lambda}{\alpha\beta+2\lambda^2} < \frac{3}{2\lambda} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\alpha\beta+2\lambda^2} < \frac{1}{2\lambda} \underset{\alpha\beta>0}{\overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow}} 2\lambda^2 < \alpha\beta+2\lambda^2 \Leftrightarrow \alpha\beta > 0$$

που ισχύει.
Επιστροφή

Υπόδειξη 15. *Από ΑΜ-ΓΜ*

$$x+y+1 \geqslant 2\sqrt{x(y+1)} \text{ και } y+z+3 \geqslant 2\sqrt{(y+1)(z+2)}$$

$$\text{και } x+z+2 \geqslant 2\sqrt{x(z+2)}$$

Άρα το αριστερό μέλος:

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{x\left(y+1\right)}+\sqrt{\left(y+1\right)\left(z+2\right)}+\sqrt{x\left(z+2\right)}\right).$$

Από ΑΜ-ΓΜ πάλι:

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x\left(y+1\right)}+\sqrt{\left(y+1\right)\left(z+2\right)}+\sqrt{x\left(z+2\right)}\right)\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{x+y+1}{2}+\frac{y+1+z+2}{2}+\frac{x+z+2}{2}\right)=3.$$

Η ισότητα ισχύει όταν $x=y+1=z+2$ *δηλαδή όταν*

$$(x,y,z)=(2,1,0)$$

Επιστροφή

Υπόδειξη 16. *Έστω* $x=\sqrt[3]{a^2+2bc}, y=\sqrt[3]{b^2+2ca}, z=\sqrt[3]{c^2+2ab}$
$x^3+y^3+z^3=(a+b+c)^2=36$
$x+y+z\leq \sqrt[3]{9(x^3+y^3+z^3)}=\sqrt[3]{324}=3\sqrt[3]{12}$
Αν και μόνο αν $x=y=z$ *είναι* $a=b=c=2$
Επιστροφή