

	<b>Τίτλος σεναρίου :</b>	Μετρικές σχέσεις στον κύκλο
	<b>Γνωστική περιοχή :</b>	Γεωμετρία Β΄ λυκείου
	<b>Θέμα :</b>	Εύρεση των σχέσεων μεταξύ των τμημάτων που ορίζονται από τέμνουσες και εφαπτόμενες στον κύκλο ευθείες
	Τεχνολογικά εργαλεία :	Λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας
	<b>Πλαίσιο εφαρμογής</b> Διδάσκων: Σε ποιους απευθύνεται :	Σωτήρης Δ. Χασάπης Μαθητές Β΄ Λυκείου
	Χρόνος υλοποίησης :	4-5 διδακτικές ώρες
	Χώρος υλοποίησης :	Εργαστήριο Η/Υ
<b>1</b>	<b>ΣΚΕΠΤΙΚΟ</b> Βασική ιδέα :	Θα μελετηθεί η περίπτωση των σχέσεων των τμημάτων που ορίζονται από δύο τέμνουσες και της ακτίνας του κύκλου, καθώς επίσης και η περίπτωση της εφαπτομένης ως οριακής περίπτωσης τέμνουσας.
<b>2</b>	<b>Στόχοι</b>	
2α	Γνωστικοί - Μαθηματικών :	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Να ανακαλύψουν τη σχέση των τμημάτων που ορίζονται μεταξύ δύο τεμνουσών από κοινό σημείο και του κύκλου.</li> <li>- Να διαπιστώσουν με δυναμικές μεταβολές του σχήματος ότι η εφαπτομένη αποτελεί οριακή περίπτωση τέμνουσας του κύκλου και να προσαρμόσουν το θεώρημα δύο τεμνουσών σε αυτήν την περίπτωση.</li> <li>- Να εφαρμόσουν το θεώρημα τέμνουσας και εφαπτομένης για μία γεωμετρική διαπίστωση της ισχύος του πυθαγορείου θεωρήματος.</li> <li>- Να οδηγηθούν στον ορισμό της έννοιας της δύναμης σημείου ως προς κύκλο και να ανακαλύψουν πώς αυτή σχετίζεται με τη γεωμετρική του θέση σε σχέση με τον κύκλο.</li> <li>- Να χρησιμοποιήσουν το θεώρημα τεμνουσών για την απόδειξη μίας κατασκευής της χρυσής τομής και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουν προσομοίωση της κατασκευής αυτής για τη μέτρηση χρυσών λόγων στο ανθρώπινο σώμα.</li> </ul>
	Νέων τεχνολογιών :	Να χρησιμοποιήσουν τα κατάλληλα εργαλεία του λογισμικού για να επιτύχουν τη μελέτη των γνωστικών στόχων με χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων : γραφικά-γεωμετρικά, αλγεβρικά με δυναμικές μεταβολές των σχημάτων.
2β	Μαθησιακές – Γνωστικές δεξιότητες : ισοδύναμα; Γνωστικές δράσεις μαθηματικών	Να μπορέσουν να χρησιμοποιήσουν την έννοια της μεταβολής ενός αντικειμένου, ώστε να βρεθεί αυτό σε οριακή θέση, προκειμένου να εξασκηθούν στην μελέτη οριακών καταστάσεων στα μαθηματικά γενικότερα.
2γ	Παιδαγωγικές – κοινωνικές δεξιότητες :	Να συνεργηθούν με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας τους, υπό την επίβλεψη του διδάσκοντα, εντός ενός κατάλληλα διαμορφωμένου μαθησιακού περιβάλλοντος, δηλαδή την τάξη τους τα διάφορα ερωτήματα – προβλήματα που παρουσιάζονται. Να συνεργαστούν και να επικοινωνήσουν παρουσιάζοντας τις απόψεις τους, διατυπώνοντας λογικά επιχειρήματα, αλλά και

		μαθηματικούς ισχυρισμούς.
3	<b>Προαπαιτούμενα</b>	
3α	Απαιτούμενα βοηθητικά εργαλεία – υλικά :	H/Y ένας για κάθε ομάδα 2-3 ατόμων, Φύλλο εργασίας, Τετράδιο για βοηθητική χρήση, πίνακας για υπενθυμίσεις, παρατηρήσεις και γενικεύσεις που θα απαιτηθεί να κοινοποιηθούν σε ολόκληρη την τάξη.
3β	Προαπαιτούμενες γνώσεις : Μαθηματικών :  Τεχνολογίας – Λογισμικού :	- Όμοια τρίγωνα. - Υπενθύμιση σχέσης Πυθαγορείου θεωρήματος από το Γυμνάσιο. - Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου. Βασικές γνώσεις χειρισμού H/Y και του λογισμικού που θα χρησιμοποιηθεί.
3γ	Κοινωνική εννοχήστρωση τάξης :	Οι μαθητές θα χωριστούν κατάλληλα σε ομάδες 2-3 ατόμων, καθοδηγούμενοι από τα ερωτήματα του φύλλου εργασίας κάθε φορά, θα διερευνήσουν συνεργατικά το συγκεκριμένο θέμα, έχοντας ελευθερία να θέσουν και να απαντήσουν και δικά τους ερωτήματα. Ο καθηγητής δρα ως συνεργάτης τους, ελέγχει τα συμπεράσματά τους και τους ενθαρρύνει στη διερεύνηση, αφήνοντάς τους ελευθερία πρωτοβουλιών η οποία θα βαίνει αυξανόμενη, καθώς η τάξη θα βρίσκει το ρυθμό της και θα εντάσσεται όλο και καλύτερα στο νέο πλαίσιο κατάρκτησης της γνώσης. Φυσικά απαιτείται προηγουμένως ο καθηγητής να έχει υλοποιήσει και αξιολογήσει το σενάριο και να έχουν τεθεί οι βάσεις για τη σωστή οργάνωση της τάξης : Κανόνες λειτουργίας, σωστός χωρισμός ομάδων με κατανομή ρόλων στα μέλη τους και απλές οδηγίες χρήσης του λογισμικού.
	<b>Γενικότερη θεωρία μάθησης</b>	Συνεργατική-ανακαλυπτική μάθηση : Διαφορετικοί ρόλοι, συζητούν, κάνουν υποθέσεις, ελέγχουν υποθέσεις, πειραματίζονται, επαναδιαπραγματεύονται. Καθηγητής σε ρόλο συνερευνητή - βοηθού. Ερωτήσεις ανοικτές σε όλους.
4	<b>Προστιθέμενη αξία :</b>	Οι μαθητές μετρώντας τις διάφορες αποστάσεις και δημιουργώντας διαφορετικές καταστάσεις στο δυναμικά μεταβαλλόμενο σχήμα θα ανακαλύψουν τη σχέση των τμημάτων που ορίζονται από δύο τέμνουσες στον κύκλο. Κατά αυτόν τον τρόπο η στατική εικόνα του πίνακα και του τετραδίου λαμβάνει «ζωή», γίνεται ενεργή με κίνηση που είναι ο κύριος εκφραστής στη γεωμετρία. Στη συνέχεια θα οδηγηθούν στη διερεύνηση της περίπτωσης που η μία τέμνουσα λαμβάνει οριακά τη θέση εφαπτομένης, μεταβάλλοντας δυναμικά, μέσω του λογισμικού, τη θέση της μίας τέμνουσας ώστε να λάβει θέση εφαπτομένης. Ως εφαρμογή του θεωρήματος περί τέμνουσας και εφαπτομένης που θα διατυπώσουν θα οδηγηθούν να ανακαλύψουν γεωμετρικά το πυθαγόρειο θεώρημα, δίνοντας γεωμετρική υπόσταση στην αλγεβρική σχέση που το εκφράζει στο τρίγωνο που θα δημιουργηθεί από μία εφαπτομένη, μία τέμνουσα και την ακτίνα στο σημείο επαφής του κύκλου με την εφαπτομένη. Τέλος, αλλάζοντας τη θέση του σημείου «αρχής» των τεμνουσών θα οδηγηθούν με φυσικό τρόπο στη σχέση της δύναμης σημείου ως προς κύκλο με τη θέση του ως προς αυτόν. Σε όλη αυτή τη διερευνητική διαδρομή θα συνεργαστούν με τους

		<p>συμμαθητές τους και θα μπορέσουν να διατυπώσουν εικασίες χωρίς το φόβο του λάθους, αφού θα είναι εφικτή η δοκιμή μέσω του λογισμικού.</p>
5	<p><b>Ανάλυση σεναρίου</b></p> <p><b>Ροή εφαρμογής δραστηριοτήτων</b></p> <p><b>2η δραστηριότητα</b></p> <p><b>3η δραστηριότητα</b></p>	<p><b>1η δραστηριότητα :</b> Κινητοποίηση: Ο διδάσκων ενεργοποιεί τους μαθητές προτρέποντάς τους να ξεκινήσουν στο φύλλο εργασίας με την τοποθέτηση ενός κύκλου και ενός σημείου. Αναμένεται να συζητήσουν και να προβληματιστούν μεταξύ τους σχετικά με τη θέση του σημείου ως προς τον κύκλο. Στη συνέχεια οι μαθητές θυμούνται από τις προαπαιτούμενες γνώσεις ποιες είναι οι σχετικές θέσεις μίας ευθείας και ενός κύκλου καταρχήν τοποθετώντας στο φύλλο εργασίας κάποιες πιθανές τέτοιες, αλλά και μετακινώντας στο λογισμικό τη θέση μίας τέμνουσας θα διακρίνουν πόσα είναι και τα κοινά σημεία που μπορεί να έχουν δύο τέμνουσες.</p> <p>Έπειτα εκμεταλλευόμενοι τις δυνατότητες μέτρησης που παρέχει το λογισμικό θα μετρήσουν τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζουν οι τέμνουσες από το σημείο τομής τους στον κύκλο. Μέσα από τη συζήτηση στην ομάδα τους και έπειτα με τους υπόλοιπους συμμαθητές τους θα υποθέσουν τη σχέση που έχουν μεταξύ τους τα ευθύγραμμα τμήματα και θα διαπιστώσουν ότι συνεχίζει να υφίσταται μεταβάλλοντας δυναμικά τη θέση των τεμνουσών είτε μετατοπίζοντας το σημείο τομής τους με τον κύκλο, είτε το σημείο τομής των δύο τεμνουσών μεταξύ τους. Τέλος, θα αποδείξουν τις υποθέσεις τους – οι οποίες θα ελεγχθούν από τον διδάσκοντα – με την υπόδειξη για χρήση ομοιότητας τριγώνων για την απόδειξή τους.</p> <p><b>2η δραστηριότητα :</b> Εδώ οι μαθητές θα οδηγηθούν να ελέγξουν την περίπτωση τέμνουσας και εφαπτομένης στον κύκλο ως οριακή περίπτωση των δύο τεμνουσών. Θα οδηγηθούν να μετακινήσουν τη μία τέμνουσα ώστε τα σημεία τομής της με τον κύκλο να συμπέσουν για να προκύψει η εφαπτομένη. Στη συνέχεια θα διατυπώσουν το θεώρημα τέμνουσας και εφαπτομένης ως οριακή περίπτωση του θεωρήματος των δύο τεμνουσών και τελικά θα το αποδείξουν, προτείνοντας να προσαρμόσουν την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος με τα όμοια τρίγωνα στη συγκεκριμένη περίπτωση. Δηλαδή, ο δυναμικός χειρισμός που επιτρέπει το λογισμικό θα δώσει την ευκαιρία στους μαθητές να ανακαλύψουν, πρώτα υποθέτοντας και έπειτα αποδεικνύοντας, κάτι που δεν είναι εφικτό χωρίς το λογισμικό.</p> <p><b>3η δραστηριότητα :</b> Με αυτήν τη δραστηριότητα οι μαθητές οδηγούνται από το θεώρημα τέμνουσας και εφαπτομένης ως προς τον κύκλο σε μία γεωμετρική διατύπωση του Πυθαγορείου θεωρήματος μέσω του λογισμικού. Αφού κατασκευάσουν τετράγωνα με το λογισμικό σε κάθεμια από τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου που προκύπτει από τη διάκεντρο, την εφαπτομένη και την ακτίνα στο σημείο επαφής θα υποθέσουν την ισχύ του Πυθαγορείου θεωρήματος. Στη συνέχεια θα διαπιστώσουν ότι ισχύει για κάθε σημείο P εκτός του κύκλου και θα καταλήξουν φυσιολογικά στην απόδειξη του χρησιμοποιώντας το θεώρημα τέμνουσας και εφαπτομένης που απέδειξαν στην προηγούμενη δραστηριότητα με χρήση ομοίων τριγώνων. Αναμένεται να ξαφνιαστούν ευχάριστα με τη διατύπωση και απόδειξη του πυθαγορείου θεωρήματος για δεύτερη φορά στη συγκεκριμένη τάξη μέσω άλλου τρόπου.</p>

	<p><b>4η δραστηριότητα</b></p> <p><b>5η δραστηριότητα</b></p>	<p><b>4η δραστηριότητα :</b> Σε αυτήν οι μαθητές θα ανακαλύψουν τη σχέση της θέσης ενός σημείου του επιπέδου με τη δύναμή του από το κέντρο του. Επειδή δεν είναι εμφανής η αναγκαιότητα και χρησιμότητα της έννοιας της δύναμης του σημείου ως προς τον κύκλο σε αντιδιαστολή με τη σύγκριση της διακέντρου με την ακτίνα του κύκλου προωθείται ένα σενάριο στο οποίο δεν είναι προσιτό το κέντρο του κύκλου για να γίνουν οι απαραίτητες μετρήσεις. Έτσι προτείνεται στους μαθητές να βρεθεί αν είναι δυνατόν τρόπος για να χρησιμοποιηθεί μία τέμνουσα αντί αυτού. Αναμένεται οι μαθητές μέσα από τις μεταξύ τους διαβουλεύσεις να προσπαθήσουν καταρχήν να συνδέσουν την τυχαία τέμνουσα με εκείνη που περιέχει διάκεντρο και ακτίνα του κύκλου. Στη συνέχεια να μεταβούν από τη διάκεντρο και την ακτίνα στην τυχαία τέμνουσα μέσω της σύνδεσής τους με το θεώρημα των δύο τεμνουσών του κύκλου.</p> <p><b>5η δραστηριότητα :</b> Εισάγεται η έννοια της χρυσής τομής στη διαίρεση ενός τμήματος. Παρουσιάζεται μία εφαρμογή με ένα μοντέλο ανθρώπου και ζητείται να συγκριθούν τα διάφορα τμήματα του ανθρώπινου σώματος με τον προκατασκευασμένο «μετρητή χρυσής τομής» όπως αυτός παρουσιάζεται στην εφαρμογή 3 του βιβλίου σελίδα 202. Οι μαθητές θα δουν εφαρμογές της παραγράφου στην καθημερινότητα και θα δοθεί η ευκαιρία για διερεύνηση των εφαρμογών της χρυσής τομής και σε άλλες δραστηριότητες της καθημερινότητας. Η δυναμική προσέγγιση που προσφέρεται από το λογισμικό θα κάνει εύκολες τις μετρήσεις ως συγκρίσεις, όπου η μονάδα μέτρησης καθορίζεται να είναι μία αναλογία μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων.</p>
6	<b>Φύλλα εργασίας</b>	Αναπτύσσονται αναλυτικά στο τέλος
7	<b>Αξιολόγηση από εφαρμογή</b> Ως προς τις επιδιώξεις	Σε γενικές γραμμές υπήρξε ομαλή λειτουργία της τάξης, ανάλογα προς τα προσδοκώμενα. Οι μαθητές αντιμετώπισαν κάποιες περισσότερες δυσκολίες στα σημεία που απαιτήθηκε από αυτούς να δώσουν αναλυτικές αποδείξεις, οι οποίες όμως αντιμετωπίστηκαν με τις μεταξύ τους συζητήσεις και τον έλεγχο κάποιων συμπερασμάτων από τον διδάσκοντα όταν χρειάστηκε.
	Ως προς τα εργαλεία	Η εξοικίωση των μαθητών με το λογισμικό δεν δημιούργησε προβλήματα.
8	<b>Επέκταση σεναρίου</b>	Οι μαθητές μπορούν να βρουν και άλλες εφαρμογές της χρυσής τομής και να προκύψει μία διαθεματική εργασία που να συνδέει τα μαθηματικά με την καθημερινότητα σε ένα εκτενές πεδίο χρήσης. Επίσης, οι μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν και δικά «μέτρα» σύγκρισης σε άλλες περιστάσεις που θα εμφανιστεί η σχετική ανάγκη.

# Φύλλο εργασίας 1

Ημερομηνία : ..... Τάξη : ..... Θέμα : Μετρικές σχέσεις στον κύκλο. Ονόματα Ομάδας :

1.	2.
3.	4.

## 1η δραστηριότητα :

1. Παρακάτω να κατασκευαστεί ένας κύκλος  $(O, \rho)$ . Στη συνέχεια να τοποθετηθεί ένα σημείο  $P$ .
2. Τι θέση μπορεί να έχει μία ευθεία που διέρχεται από το  $P$  ως προς τον παραπάνω κύκλο; Να κατασκευαστούν δύο τέτοιες ευθείες στο προηγούμενο σχήμα. Συζητήστε τα συμπεράσματα της ομάδας σας με τους υπόλοιπους συμμαθητές σας. Πόσα κοινά σημεία μπορεί να έχει μία τέτοια ευθεία με τον κύκλο και πώς ονομάζεται;
3. Να ανοίξετε το αρχείο *τέμνουσες*. Μέτρησε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζουν οι τέμνουσες με τον κύκλο. Διαπιστώνεις να έχουν κάποια σχέση μεταξύ τους; Άλλαξε τη θέση των τεμνουσών, μεταβάλλοντας είτε τα σημεία τομής με τον κύκλο, είτε το σημείο τομής των δύο τεμνουσών. Αφού συζητήσεις με τους υπόλοιπους συμμαθητές σου να καταγράψεις τις υποθέσεις σας παρακάτω :
4. Χρησιμοποιώντας και μετατρέποντας κατάλληλα το σχήμα που κατασκεύασες στο ερώτημα 1 προσπάθησε να αποδείξεις τα συμπεράσματά σας με τη βοήθεια όμοιων τριγώνων:

## 2η δραστηριότητα :

5. Μετακίνησε τα σημεία τομής της μίας τέμνουσας με τον κύκλο, ώστε να πλησιάσουν μεταξύ τους. Μπορούν να ταυτιστούν; Τι συμβαίνει τότε; Ισχύουν ακόμα τα συμπεράσματα του προηγούμενου ερωτήματος; Συζητήστε το με τους υπόλοιπους συμμαθητές σας.
6. Διαμορφώστε μία υπόθεση που να ταιριάζει στη συγκεκριμένη περίπτωση:
7. Μπορείτε να κάνετε παρόμοια απόδειξη με αυτήν του θεωρήματος που διατυπώσατε για τις τέμνουσες;

## Φύλλο εργασίας 2

Ημερομηνία : ..... Τάξη : ..... Θέμα : Μετρικές σχέσεις στον κύκλο II. Ονόματα Ομάδας :

1.	2.
3.	4.

### 3η δραστηριότητα :

1. Άνοιξε το αρχείο *τέμνουσες2*. Στο τρίγωνο PEO κατασκεύασε τετράγωνο σε κάθε μία από τις πλευρές του και εξωτερικά του τριγώνου αυτού.
2. Ποιο είναι το είδος του τριγώνου PEO; Μέτρησε τα εμβαδά καθενός από τα τετράγωνα και σύγκρινέ τα μεταξύ τους. Τι παρατηρείς; Συζητήστε τα συμπεράσματά σας.
3. Άλλαξε τη θέση του σημείου τομής P της τέμνουσας και της εφαπτομένης. Τι αλλάζει; Τι παραμένει σταθερό; Ποια η σχέση των εμβαδών των τετραγώνων; Μπορείτε να διατυπώσετε αναλυτικά το συμπέρασμά σας;
4. Γράψε μία απόδειξη του θεωρήματος χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες τέμνουσας και εφαπτομένης του κύκλου.

### 4η δραστηριότητα :

1. Θεωρούμε έναν κύκλο  $(O, \rho)$  και ένα σημείο P του επιπέδου για το οποίο δεν γνωρίζουμε τη σχετική του θέση με τον κύκλο. Επίσης δεν μπορούμε να μετρήσουμε τη διάκεντρο ούτε και την ακτίνα του κύκλου διότι δεν είναι προσιτό το κέντρο του O. Μπορείς να συνδέσεις τη θέση του σημείου αυτού ως προς τον κύκλο με μία τέμνουσα του κύκλου που διέρχεται από αυτό; Μπορείς να συνδέσεις τα τμήματα της τέμνουσας στον κύκλο με τη διάκεντρο και την ακτίνα; Συζητείστε στην ομάδα σας πώς μπορείτε να τα συνδέσετε. Διατυπώστε τις υποθέσεις σας :
2. Μέτρησε στο σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα της παραπάνω περίπτωσης. Μετατόπισε το σημείο P. Αλλάζει η σχέση των τμημάτων; Πώς μπορείς να αποδείξεις τη σχέση αυτών των τμημάτων;

3. Τι είδους τιμές μπορεί να λάβει αριθμός αυτός που φαίνεται να χαρακτηρίζει το σημείο P ως προς τον κύκλο (O,ρ); Μετατόπισε το σημείο P σε διάφορες δυνατές θέσεις ως προς τον κύκλο και διαπίστωσε τι ακριβώς συμβαίνει. Δίνουμε έναν ορισμό για αυτόν του αριθμού που χαρακτηρίζει τη θέση του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,ρ) :.....  
.....

### 5η δραστηριότητα :

1. Άνοιξε το αρχείο *χρυσή τομή.ggb*. Επίλεξε το κουτί *Εμφάνιση μετρητή φ*. Το τμήμα AB έχει χωριστεί σε δύο μέρη με το σημείο Γ(ας ονομάσουμε αυτό το σχέδιο μετρητή φ). Μέτρησε και σύγκρινε τους λόγους των ευθυγράμμων τμημάτων AB, ΑΓ, ΒΓ, ανά δύο. Τι παρατηρείς; Συζητείστε τα συμπεράσματά σας.
2. Μπορείς να αποδείξεις γεωμετρικά την ιδιότητα αυτή, αν γνωρίζεις ότι  $ΔB = \frac{AB}{2}$  και ο κύκλος (Δ,ΔB) εφάπτεται στο AB στο σημείο B;
3. Επίλεξε το κουμπί *Εμφάνιση da vinci*. Εμφανίζεται ένα σχέδιο ανθρώπινου σώματος. Τοποθέτησε τα σημεία A,B στην κορυφή του κεφαλιού και στα πόδια του σχεδίου. Τι παρατηρείς;
4. Δοκίμασε να τοποθετήσεις το *μετρητή φ* σε άλλα σημεία που συνδέουν οστά του σχεδίου του ανθρώπινου σώματος. Τι παρατηρείς; Γνωρίζεις άλλες κατασκευές που να ταιριάζουν με τη μέτρηση αυτή;

### Εξάσκηση :

Να αναζητήσετε στη βιβλιοθήκη επιπλέον πληροφορίες για τη *χρυσή τομή φ*. Βρείτε που αλλού χρησιμοποιείται. Ποια είναι η ιστορική της προσέγγιση, παραθέτοντας τα βιβλία που χρησιμοποιήσατε ως πηγές σας.