# Πρότυπα και αριθμοί Catalan

Διδακτικές προτάσεις διδασκαλίας Μαθηματικών

Σ. Δ. Χασάπης
Σ.Δαβάκη 19 Κερατσίνι 18757
shasapis@gmail.com

Δ. Παναγόπουλος
Πέλοπα 3 Γέρακας 15344
dpanagop@yahoo.gr

**Περίληψη.** Η αναγνώριση και η χρήση προτύπων στα μαθηματικά αποτελεί μία από τις κύριες διεργασίες όταν «κάνουμε μαθηματικά». Η εισαγωγή τους στην Ελληνική υποχρεωτική μαθηματική εκπαίδευση είναι από τους βασικούς στόχους των προγραμμάτων σπουδών τα τελευταία χρόνια[1]. Η εισδοχή τους στο Λύκειο, αλλά και το Πανεπιστήμιο, απαιτεί συνδυασμούς με πολλαπλές αναπαραστάσεις και σύνθεση – εφαρμογή τους σε πραγματικές καταστάσεις που θα προκαλέσουν το ενδιαφέρον των μαθητών. Οι αριθμοί Catalan, με την πολύπλευρη παρουσία τους, την κανονικότητα και τη δομή που εμπεριέχουν μπορούν να ανταποκριθούν ως ένα τέτοιο παράδειγμα. Στην παρούσα παρουσιάζεται ένα πλαίσιο και κάποιες από τις εφαρμογές των αριθμών Catalan, ενταγμένα στην παραπάνω λογική.

**Abstract.** Identification and use of patterns is of great importance when "doing mathematics". One of the main goals of the Greek syllabus is to introduce patterns in mathematical courses. This introduction in secondary, as well as in higher education demands that patterns are presented through real-life examples that entail use of multiple representations and will therefore intrigue and motivate students. Catalan numbers with their structure and numerous appearances in various fields of study satisfy the previous criteria. In this spirit, the authors present in this article Catalan numbers and some of their applications.

[1]Βλέπε αναμορφωμένο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Σπουδών-Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών υποχρεωτικής εκπαίδευσης, ΥΠΕΠΘ-Π.Ι, τόμος Α΄, Αθήνα, Σεπτέμβριος 2002

# Εισαγωγή

Τα μαθηματικά θεωρούνται κατά διάφορους τρόπους ως η *επιστήμη των προτύπων* (The science of patterns *[7],[8]*). Ένα **πρότυπο**[2] εγκλείει την κανονικότητα και τη δομή ενός μαθηματικού αντικειμένου. Στην πραγματικότητα αποτελεί συμπυκνωμένη εμπειρία πολλών ανθρώπων στην εξέλιξη ενός μαθηματικού αντικειμένου. Η αναγνώριση και κατανόηση ενός προτύπου απαιτούν ανάπτυξη μεταγνωστικών λειτουργιών και κατανόηση της δομής σε βάθος. Δηλαδή αποτελεί ένα υψηλό στόχο στη μαθηματική εκπαίδευση, αλλά επιπλέον η ανάπτυξη δεξιοτήτων επέκτασης ενός προτύπου επιτρέπει την επαναχρησιμοποίησή του και διανοίγει αποτελεσματικούς δρόμους επίλυσης προβλημάτων[3]. Οι πολλαπλές μορφές των προτύπων [3] και οι αντίστοιχες πολλαπλές αναπαραστάσεις τους μπορούν να ωθήσουν τη σύγχρονη διδασκαλία των μαθηματικών στις ανάγκες των μαθητών και των στόχων σύγχρονων αναλυτικών προγραμμάτων. Πρότυπα αρίθμησης, όπως οι φυσικοί αριθμοί που αποτελούν το απλούστερο παράδειγμα τέτοιου είδους προτύπου ή οι αριθμοί Catalan που συνιστούν μία εκλεπτυσμένη εφαρμογή των αρχών της συνδυαστικής και της απαρίθμησης μπορούν να εντάξουν πολλές διαφορετικές κατηγορίες προβλημάτων και να αναδείξουν στα μάτια μαθητών και φοιτητών την ομορφιά, την αναγκαιότητα και την τέχνη του να «κάνεις μαθηματικά» (Doing mathematics).

Η διερεύνηση των προτύπων απαιτεί λειτουργίες όπως: υπόθεση – δοκιμή – έλεγχο και απόδειξη – γενίκευση και τελικά αναγνώριση και επαναχρησιμοποίηση. Έτσι, ο ασκούμενος στα μαθηματικά μπορεί να μάθει όχι μόνο τους κανόνες τους και τη χρήση τους, αλλά να προχωρήσει πέρα από αυτούς, να λύσει προβλήματα, να δει πραγματικές χρήσεις τους, ώστε τελικά να διατηρήσει ενεργό το ενδιαφέρον του. Δηλαδή « το αναμενόμενο » που είναι η – συχνά – βαρετή τήρηση των κανόνων της μαθηματικής συλλογιστικής, να εναλλάσσεται με «το απροσδόκητο», που μπορεί να συνί-

[2]Χρησιμοποιούμε τη λέξη **πρότυπο** για τον όρο **pattern**, αν και δεν απεικονίζει επακριβώς η προϋπάρχουσα καθημερινή της έννοια τον όρο pattern. Στην πραγματικότητα όμως φαίνεται να έχει καθιερωθεί σε μεγάλο ποσοστό στην Ελληνική βιβλιογραφία. Στα προγράμματα σπουδών του Π.Ι. ή του Υπουργείου γίνεται χρήση των όρων μοτίβο και κανονικότητα. Ο μεν πρώτος δεν είναι Ελληνικός, ενώ ο δεύτερος δεν εγκλείει και τη δομή μαζί με την κανονικότητα.

[3]Στο «Ο ρόλος των προτύπων στη διδασκαλία των μαθηματικών» [2] διερευνώνται σχετικές απόψεις για την εφαρμογή των προτύπων στη διδασκαλία των μαθηματικών στην εννιάχρονη υποχρεωτική εκπαίδευση.

σταται στην αναγνώριση ενός προτύπου, το οποίο δε θα έπρεπε να βρίσκεται εκεί σε πρώτη ανάγνωση, μέσω του οποίου τελικά θα επιτραπεί η επίλυση ενός όμορφου προβλήματος και η βαθύτερη κατανόηση της δομής του.

Οι αριθμοί Catalan ορίζονται με διάφορους τρόπους και εμφανίζονται κατά τη μελέτη πολλών προβλημάτων. Τα προβλήματα αυτά σχετίζονται με την καθημερινότητα και είναι κατανοητά από τους μαθητές. Μπορούν λοιπόν να κεντρίσουν το ενδιαφέρον τους. Δηλαδή, ο διδάσκων μπορεί να εντάξει τη μελέτη των αριθμών Catalan στη διδασκαλία του ως ένα ενδιαφέρον πρότυπο με εφαρμογές σε φαινομενικά ασυσχέτιστα μεταξύ τους προβλήματα και τελικά να διευρύνει αριθμητικά πρότυπα που ήδη χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία των μαθηματικών στο Λύκειο και το Πανεπιστήμιο και με τους αριθμούς Catalan που βρίσκουν ενδιαφέρουσες εφαρμογές.

## Σύντομη ιστορία των αριθμών Catalan

Ο Βέλγος μαθηματικός E.C.Catalan[4] χρησιμοποίησε την ακολουθία αυτών των αριθμών το 1838, στην προσπάθειά του να επιλύσει ένα πρόβλημα καλής διάταξης – αντιστοίχισης παρενθέσεων. Εντούτοις πολύ πριν (περί το 1751) ο Euler μελέτησε τις τριγωνοποιήσεις κυρτών πολυγώνων, όπου και κατέληξε στους αριθμούς Catalan [4]. Μάλιστα, θεωρείται πιθανό να είχε κάνει χρήση τους ακόμα πιο πριν (περί το 1730) ο Κινέζος μαθηματικός Antu Ming [5]. Γενικότερα, στην εποχή μας έχουν ασχοληθεί πολλοί μαθηματικοί με τους αριθμούς Catalan και έχουν αναλύσει τη χρήση τους. Ο Richard Stanley του M.I.T. περιγράφει περισσότερες από 70 χρήσεις τους στο [11], κεφάλαιο 6, ενώ έχει δημιουργήσει και το Catalan Addendum[5] όπου περιγράφει άλλες 70 χρήσεις τους. Οι πρώτοι σε σειρά αριθμοί Catalan είναι οι: 1,1,2,5,14,42,132,429,… και περιγράφονται ως η 577η ακολουθία ακεραίων στο [9] και ως η A000108 στην ιστοσελίδα *oeis.org*[6]. Σύμφωνα με τον Martin Gardner αποτελεί την πιο συχνά εμφανιζόμενη ακολουθία ακε-

[4]**Eugene Charles Catalan (1814 – 1894).** Γεννήθηκε στο Βέλγιο και σπούδασε στην Ecole Polytechnique στο Παρίσι. Υπήρξε καθηγητής μαθηματικών σε κολλέγιο και το 1865 έγινε καθηγητής ανάλυσης στο Πανεπιστήμιο της Λιέγης. Έγραψε για Γεωμετρία, Αστρονομία και πολλά άρθρα για πολλαπλά ολοκληρώματα, θεωρία επιφανειών, ανάλυση, λογισμό πιθανοτήτων κ.ά.

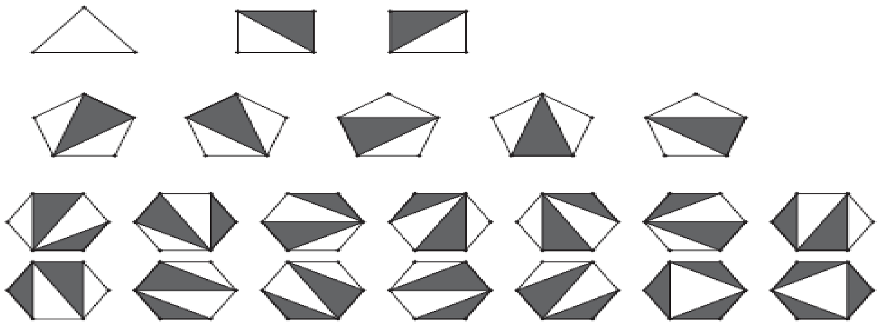
[5]http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catadd.pdf

[6]The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

ραίων, η οποία ταυτόχρονα δεν είναι και τόσο γνωστή, όσο για παράδειγμα η ακολουθία Fibonacci και άλλες. Μερικές από τις εμφανίσεις τους που θα παρουσιαστούν στο παρόν αφορούν: το πρόβλημα της τριγωνοποίησης κυρτού πολυγώνου του Euler, τακτοποίηση παρενθέσεων του Catalan, διαδρομές σε τετράγωνο χωρίς να τέμνεται η διαγώνιος, εξαγωγή από το τρίγωνο Pascal και συσχέτιση με τους κεντρικούς διωνυμικούς συντελεστές, πλήθος τρόπων προσεταιρισμού πολλαπλασιασμού ν συμβόλων, βουνοκορυφές, πρόβλημα χειραψιών.

## Εμφανίσεις των αριθμών Catalan

Ας ξεκινήσουμε με ένα απλό στη διατύπωσή του πρόβλημα:
*με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να σχεδιάσουμε διαγώνιους σε ένα κανονικό πολύγωνο έτσι ώστε αυτές να μην τέμνονται και να χωρίζουν το πολύγωνο σε τρίγωνα (βλ. Εικόνα 1);*



*Εικόνα 1: Τριγωνοποιήσεις του τριγώνου, του τετραγώνου και των κανονικών πενταγώνων και εξαγώνων*

Το πρόβλημα αυτό λύθηκε από τον Euler το 1761. Η απόδειξη του είναι αρκετά υπολογιστική και για αυτό την παραλείπουμε. Μπορούμε όμως να «ανακαλύψουμε» μία απόδειξη, η οποία είναι παρόμοιας λογικής με απόδειξη του σχολικού βιβλίου γεωμετρίας ([1] σελ.85), όπου, τριγωνοποιώντας ένα κυρτό πολύγωνο προσδιορίζει το άθροισμα των γωνιών του. Αυτή η απόδειξη οφείλεται στον Segner[7] (1761) και μας οδηγεί σε έναν αναδρομικό τύπο. Πριν δούμε αυτήν την απόδειξη όμως, αρκεί να πούμε ότι το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να τριγωνοποιήσουμε ένα κανονικό n-γωνο όπως πριν δίνεται από τον τύπο:

[7]Johann Andreas von Segner(1704–1777), Μαθηματικός, Φυσικός και Γιατρός, γεννημένος στο Pressburg, της Ουγγαρίας (σημερινή Bratislava, Σλοβακίας).

$$T_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-10)}{(n+1)!}, n \geq 3$$

Θέτουμε

$$C_n = T_{n+2} == \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-2)}{(n+1)!}, n \geq 1$$

Παρατηρούμε ότι:

$$C_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-2)}{(n+1)!} =$$

$$\frac{4n-2}{n+1} \cdot \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cdots \cdot (4n-4)}{n!} = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}$$

Όπου $C_0 = C_1 = 1$.

Με βάση αυτόν τον αναδρομικό ορισμό έχουμε:

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}$$

$$C_{n-1} = \frac{4n-6}{n} C_{n-2}$$

$$C_{n-2} = \frac{4n-10}{n-1} C_{n-3}$$

$$\vdots$$

$$C_2 = \frac{4n-6}{n} C_1$$

$$C_1 = 1$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$C_n = \frac{(4n-2)(4n-6) \cdot \ldots \cdot 6}{(n+1)n \cdot \ldots \cdot 3} =$$

$$= \frac{(4n-2)(4n-6) \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 2}{(n+1)n \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2} =$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1}{(n+1)!} \cdot 2^n =$$

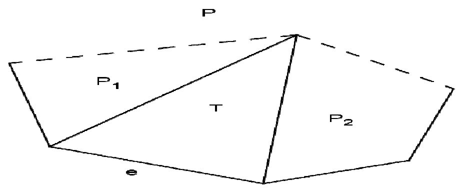
$$= \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2}{(n+1)!\,(2n-2)(2n-4) \cdot \ldots \cdot 2} 2^n =$$

$$= \frac{(2n)!}{(n+1)!\,2^n (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 1} 2^n = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται αριθμοί Catalan.

## Η συνδυαστική απόδειξη του Segner

Θεωρούμε το πολύγωνο P, όπως στην εικόνα 2. Η ακμή του e θα ανήκει σε μοναδικό τρίγωνο T. Επιλέγοντας την τρίτη κορυφή του T (που δεν ανήκει στην e) σχηματίζονται δύο μικρότερα πολύγωνα $P_1, P_2$ τα οποία θα έχουν σύνολο πλευρών n+2. Από πολλαπλασιαστική αρχή της συνδυαστικής προκύπτει ότι οι τριγωνοποιήσεις του n-γώνου P θα είναι : $T_n = T_2T_{n-1} + T_3T_{n-2} + \cdots + T_{n-1}T_2, n \geq 3$ . Συνεπώς, αν θεωρήσουμε $C_n = T_{n+2}$ τότε προκύπτει ο ***αναδρομικός τύπος του Segner :*** $C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0$.




*Εικόνα 2: Τριγωνοποίηση και τύπος Segner*

## Η εικασία του Urban

Ο αναδρομικός τύπος του Segner εμφανίστηκε το 1941 ως εικασία από τον H.Urban, ο οποίος αναγνώρισε το εξής πρότυπο :

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{4 \cdot [1] - 2}{1 + [1]}$$

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{2}{1} = \frac{6}{3} = \frac{4 \cdot [2] - 2}{1 + [2]}$$

$$\frac{C_3}{C_2} = \frac{5}{2} = \frac{10}{4} = \frac{4 \cdot [3] - 2}{1 + [3]} \text{και} \frac{C_4}{C_3} = \frac{14}{5} = \frac{4 \cdot [4] - 2}{1 + [4]}$$

Δηλαδή : $\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{4n-2}{1+n}$.

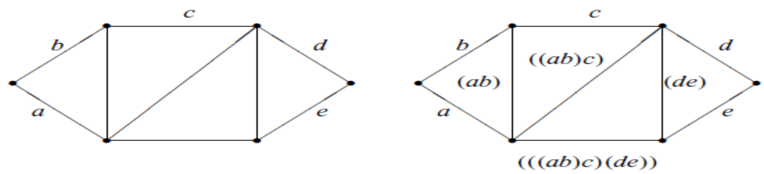
Παρατηρούμε δηλαδή ότι η ίδια η ιστορία της εξέλιξης των μαθηματικών αντικειμένων μπορεί να μας προσφέρει παραδείγματα (και αναμενόμενες συμπεριφορές) εύρεσης και αναγνώρισης προτύπων.

Ας υποθέσουμε τώρα το εξής πρόβλημα :
*Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε n ζευγάρια παρενθέσεων σε μια ακολουθία n γραμμάτων ώστε το αποτέλεσμα να είναι συντακτικά σωστό;*

Για παράδειγμα αν έχουμε ένα ζευγάρι τότε έχουμε ένα τρόπο: (a), για δύο ζευγάρια έχουμε δύο τρόπους: (a)(b),((ab)). Για τρία ζευγάρια πέντε τρόπους:(a)(b)(c),((a)b(c)),((ab))(c),(a)((bc)),(((abc))). Οι αριθμοί αυτοί είναι και πάλι οι $C_1, C_2, C_3, \dots$.

Το γεγονός αυτό δεν αποτελεί σύμπτωση. Υπάρχει τρόπος να μεταβούμε από το ένα πρόβλημα στο άλλο. Δηλαδή να αναγνωρίσουμε το πρότυπο που συνιστά η ακολουθία των αριθμών Catalan και να καλύψουμε τις θέσεις της με τα κατάλληλα κάθε φορά αντικείμενα [6]. Αυτή η αναγνώριση προτύπου και το ταίριασμά του σε ένα νέο πρόβλημα – φαινομενικά διαφορετικό – αποδίδει ήδη πολλά από τα στοιχεία που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Αν έχουμε ένα (n+2)-γωνο τότε μπορούμε σε κάθε τριγωνοποίηση του να αντιστοιχήσουμε μια διάταξη n παρενθέσεων και αντίστροφα. Για να το πετύχουμε αυτό έστω ότι έχουμε μια τριγωνοποίηση του (n+2)-γωνου. Σταθεροποιούμε μια πλευρά και τη θεωρούμε ως βάση του. Ονομάζουμε τις υπόλοιπες πλευρές του κινούμενοι σε μια φορά (π.χ. με αυτήν των δεικτών του ρολογιού). Στο τέλος ονοματίζουμε με τη σειρά όλες τις εναπομένουσες ακμές του (n+2)-γωνου έτσι ώστε σε κάθε βήμα αν θέλουμε να ονοματίσουμε μια πλευρά που συνδέει τις πλευρές με όνομα a, b να την ονομάζουμε (ab).




*Εικόνα 3: Μετάβαση από τριγωνοποίηση εξαγώνου σε ακολουθία 4 παρενθέσεων*

## *Αριθμοί Catalan παντού*

Στα προηγούμενα παρουσιάστηκαν συνδυαστικά προβλήματα που έχουν ως λύση τους αριθμούς Catalan. Όμως, όπως έχει γράψει και ο Martin Gardner, οι αριθμοί αυτοί έχουν την τάση «να εμφανίζονται ξαφνικά» σε διάφορα προβλήματα. Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε το παρακάτω «σύνθετο κλάσμα»:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{a_1}{a_2}}{\vdots}}{a_n}$$

με πόσους τρόπους μπορούμε να το ερμηνεύσουμε; Για παράδειγμα το

$\cfrac{\cfrac{a_1}{a_2}}{a_3}$ μπορεί να ερμηνευτεί με δύο τρόπους : $\dfrac{\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)}{a_3}$ ή $\dfrac{a_1}{\left(\dfrac{a_2}{a_3}\right)}$.

Αν γράφαμε οριζόντια τους όρους και παραλείπαμε τις γραμμές των κλασμάτων θα παίρναμε τις ακολουθίες $((a_1 a_2) a_3), (a_1(a_2 a_3))$. Δηλαδή το πρόβλημα αυτό ανάγεται στο πρόβλημα της ορθής τοποθέτησης n ζευγών παρενθέσεων σε μια ακολουθία n γραμμάτων. Συνεπώς η απάντηση είναι οι αριθμοί Catalan. Βέβαια, το παραπάνω πρόβλημα μπορεί επίσης να ληφθεί και ως οι δυνατότητες πολλαπλασιασμού στα n σύμβολα μίας προσεταιριστικής και μη μεταθετικής πράξης.

Αν σε κάθε λύση του προβλήματος της τοποθέτησης παρενθέσεων σε ακολουθίες αντιστοιχίσουμε στις αριστερές παρενθέσεις ( γραμμές προς τα πάνω / ενώ στις δεξιές γραμμές προς τα κάτω \, τότε σε κάθε λύση αντιστοιχίζεται μια «βουνοκορφή» η οποία δεν πέφτει κάτω από το «μηδέν».

| | |
|---|---|
| $n = 1$: | /\ |
| $n = 2$: | /\ <br> /\/\, /  \ |
| $n = 3$: | /\ <br> /\   /\   /\/\   /  \ <br> /\/\/\, /\/  \, /  \/\, /    \, /      \ |

*Εικόνα 4: Βουνοκορυφές με 1,2 και 3 ζευγάρια γραμμών επάνω / ,κάτω *

Κάθε τέτοια «βουνοκορυφή» με n ζευγάρια γραμμών πάνω / και γραμμών κάτω \ αντιστοιχεί με φυσιολογικό τρόπο σε μια διαδρομή από την πάνω αριστερή γωνία στη κάτω δεξιά σε ένα nxn κιγκλίδωμα με οριζόντια και κατακόρυφα βήματα και η οποία δεν διασχίζει τη διαγώνιο.

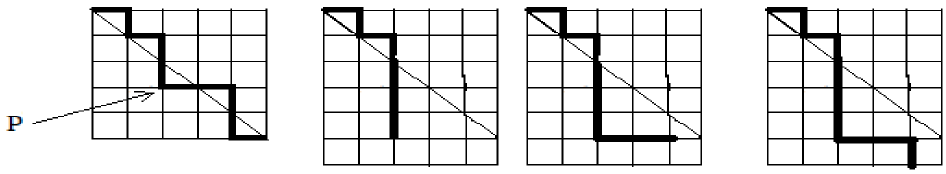
*Εικόνα 5: Αντιστοίχιση μιας διαδρομής σε κιγκλίδωμα με μια βουνοκορυφή*

Στη συγκεκριμένη περίπτωση η εφαρμογή και ταύτιση των θέσεων στο ίδιο πρότυπο των αριθμών Catalan μπορεί να γίνει με έναν απλό γεωμετρικό μετασχηματισμό (στροφή), με τη βοήθεια του οποίου θα αναγνωριστεί η εναλλακτική κάλυψη των θέσεων του προτύπου. Δηλαδή, γίνεται γεωμετρική μετάβαση από τη μία χρήση του προτύπου στην άλλη.

## Απόδειξη του κλειστού τύπου

Το προηγούμενο παράδειγμα μπορεί να μας βοηθήσει να αποδείξουμε τον κλειστό τύπο για τους αριθμούς Catalan. Μια διαδρομή από την επάνω αριστερή γωνία ενός $nxm$ κιγκλιδώματος στην κάτω δεξιά μπορεί να γίνει με $\binom{n+m}{n}$ τρόπους. Αυτό γιατί μια τέτοια διαδρομή γίνεται σε $n+m$ βήματα όπου κάθε βήμα είναι προς τα δεξιά ή προς τα κάτω. Συνεπώς, μια τέτοια διαδρομή καθορίζεται πλήρως από το σε ποια βήματα θα κινηθούμε προς τα κάτω. Αυτό μπορεί να γίνει επιλέγοντας $m$από τα $n+m$ βήματα.

Οπότε το πλήθος όλων των διαδρομών από την πάνω αριστερή γωνία στην κάτω δεξιά σε ένα $nxn$ κιγκλίδωμα είναι $\binom{2\text{n}}{n}$. Μία τέτοια διαδρομή ίσως να τέμνει τη διαγώνιο. Αν αυτό συμβαίνει ορίζεται το σημείο P ως το τέλος της πρώτης ακμής που βρίσκεται κάτω από τη διαγώνιο (βλ.εικ.6). Για μια τέτοια διαδρομή και ξεκινώντας από την ακμή με αρχή την P κατασκευάζουμε μια νέα πηγαίνοντας κάτω αν στην αρχική διαδρομή πηγαίναμε δεξιά και αντίστροφα. Εφόσον η αρχική διαδρομή έχει περάσει κάτω από τη διαγώνιο στο σημείο P θα έχει κάνει ένα βήμα επιπλέον προς τα κάτω από ότι δεξιά. Άρα αν έχει κάνει $k$ βήματα δεξιά μέχρι το P θα έχει κάνει $k+1$ βήματα κάτω. Επειδή η αρχική διαδρομή έχει $n$ βήματα δεξιά και $n$βήματα κάτω στο σημείο P θα απομένουν $n-k$βήματα δεξιά και $n-k-1$ κάτω. Λόγω της αντιστροφής η νέα διαδρομή κάτω από το P κάνει $n-k-1$ βήματα δεξιά και $n-k$ κάτω. Συνεπώς, η νέα διαδρομή κάνει $k+n-k-1=n-1$ βήματα δεξιά και $k+1+n-k=n+1$ κάτω (στη νέα διαδρομή προσθέτουμε μια γραμμή στο τέλος).



*Εικόνα 6: Σταδιακή μετατροπή μιας διαδρομής σε nxn κιγκλίδωμα που περνά κάτω από τη διαγώνιο σε μια σε (n-1)x(n+1) κιγκλίδωμα*

Τελικά, υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ των διαδρομών που τέμνουν τη διαγώνιο με αυτά που κάνουν $n-1$ βήματα δεξιά και $n+1$ βήματα κάτω. Δηλαδή, το πλήθος των προβληματικών διαδρομών είναι : $\binom{n-1+n+1}{n+1}=\binom{2n}{n+1}$.

Συνεπώς, το πλήθος των διαδρομών που δεν διέρχονται κάτω από τη διαγώνιο θα είναι:

$$C_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}=$$
$$\binom{2n}{n}-\frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!}=$$
$$\binom{2n}{n}-\frac{n(2n)!}{(n+1)n!\,n(n-1)!}=$$
$$\binom{2n}{n}-\frac{n}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!\,n!}=$$
$$\binom{2n}{n}-\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}=\frac{1}{n+1}\cdot\binom{2n}{n}$$

## Catalan και στο τρίγωνο του Pascal

Οι διωνυμικοί συντελεστές συνήθως είναι ήδη γνωστοί από τα αναπτύγματα των ταυτοτήτων : $(a+b)^2,(a+b)^3,(a+b)^n$. Συνηθίζεται μάλιστα να παρουσιάζονται με το γνωστό τρίγωνο του Pascal :

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Παρατηρώντας το, φαίνεται ότι αν από τους κεντρικούς διωνυμικούς συντελεστές 1,2,6,20 αφαιρεθούν αντίστοιχα οι συντελεστές της δεξιάς ή της αριστερής στήλης στην ίδια γραμμή : 0, 1, 4, 15 τότε προκύπτουν οι αριθμοί : $C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5$ το οποίο φυσικά και δεν είναι τυχαίο, αλλά προς επιβεβαίωση αναζητούμε την γενίκευση με την απόδειξη.

Πράγματι, ισχύει ότι :

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)n!}((n+1)-n) = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

## Πρόβλημα παρενθέσεων και γεννήτρια συνάρτηση

Παραπάνω εντοπίσαμε τους αριθμούς Catalan στους τρόπους τοποθέτησης n διαφορετικών ζευγών παρενθέσεων. Συγκεκριμένα ισχύει η αντιστοιχία :

| Ζεύγη παρενθέσεων | | $C_n$ |
|---|---|---|
| 0 | $\emptyset$ | $C_0 = 1$ |
| 1 | (αβ) | $C_1 = 1$ |
| 2 | ((αβ)γ), (α(βγ)) | $C_2 = 2$ |
| 3 | (((αβ)γ)δ), ((α(βγ)δ), (α((βγ)δ)), (α(β(γδ))), ((αβ)(γδ)) | $C_3 = 5$ |

Αν γίνει αντικατάσταση όλων των συμβόλων στις παραπάνω περιπτώσεις με μία κοινή μεταβλητή x και προσθέτοντας ανά γραμμή, τότε μπορούμε να διακρίνουμε τις εξής αντιστοιχίες :

| | |
|---|---|
| $\emptyset$ | $1 \cdot x$ |
| (αβ) | $xx = x^2$ |
| ((αβ)γ), (α(βγ)) | $[((xx)x) + (x(xx))] = 2x^3$ |
| (((αβ)γ)δ), ((α(βγ)δ), (α((βγ)δ)), (α(β(γδ))), ((αβ)(γδ)) | $(((xx)x)x) + ((x(xx))x) + (x((xx)x)) + (x(x(xx))) + ((xx)(xx)) = 5x^4$ |

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, προσθέτοντας εμφανίζεται μία τυπική δυναμοσειρά :

$$P(x) = 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 + 5x^4 + \cdots = C_0 x + C_1 x^2 + C_2 x^3 + C_3 x^4 + \cdots$$

στην οποία εμφανίζονται οι αριθμοί Catalan, ως συντελεστές αυτής της δυναμοσειράς. Οι αναπαραστάσεις ακολουθιών με τέτοιες τυπικές δυναμοσειρές[8], οι οποίες καλούνται **γεννήτριες συναρτήσεις** προσφέρουν πολλά πλεονεκτήματα, μεταξύ των οποίων και η δυνατότητα ευκολότερων υπολογισμών. Γενικά η (**συνήθης**) **γεννήτρια συνάρτηση** της ακολουθίας $\{a_0, a_1, \ldots\}$ ορίζεται ως η τυπική δυναμοσειρά : $\sum_{n=0}^{\infty} \quad a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots$ για την οποία είναι σημαντικός ο υπολογισμός ενός κλειστού τύπου αφενός και η δυνατότητα προσδιορισμού του συντελεστή μίας συγκεκριμένης δύναμης του x, ο οποίος εκφράζει τον αντίστοιχο όρο της ακολουθίας αφετέρου. Η αναζήτηση ενός κλειστού τύπου ενδείκνυται διότι υπάρχουν προβλήματα τα οποία αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες πράξεις μεταξύ των γεννητριών συναρτήσεων [6]. Συνεπώς, η εύρεση ενός κλειστού τύπου για μια γεννήτρια συνάρτηση οδηγεί στην απλοποίηση των υπολογισμών .

Για την εύρεση ενός κλειστού τύπου για τη γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Catalan παρατηρούμε στον αναδρομικό τύπο του Segner ότι: $C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_0$, ο οποίος μπορεί να προκύπτει ως συντελεστής στον πολλαπλασιασμό τυπικών δυναμοσειρών. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι : $(\sum_{n=0}^{\infty} \quad a_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} \quad b_n x^n) = (\sum_{n=0}^{\infty} \quad c_n x^n)$, όπου οι συντελεστές $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$. Αν υψωθεί στο τετράγωνο

[8]Ονομάζονται τυπικές δυναμοσειρές, διότι δεν μας ενδιαφέρει η σύγκλισή τους. Για τη γενική αντιμετώπιση προβλημάτων με αυτές μπορεί κανείς να ανατρέξει στα [12] και [10].

η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας Catalan $C(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots$

ισχύει ότι $$(C(x))^2 = (C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots) \cdot (C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots) =$$
$$C_0^2 + (C_0 C_1 + C_1 C_0)x + (C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0)x^2 + \cdots =$$
$$1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_k x^{k-1} + \cdots \Leftrightarrow$$
$$x(C(x))^2 = x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots + C_k x^k + \cdots \Leftrightarrow$$
$$x(C(x))^2 = C(x) - 1 \Leftrightarrow$$
$$x(C(x))^2 - C(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

Από την τελευταία σχέση οι θετικοί συντελεστές της γεννήτριας συνάρτησης προκύπτουν αν επιλεχθεί ο τύπος με το αρνητικό πρόσημο. Δηλαδή, ο κλειστός τύπος για τη γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Catalan είναι :

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Αν χρησιμοποιηθεί το **γενικευμένο διωνυμικό ανάπτυγμα** στον προηγούμενο τύπο $(1+x)^u = \binom{u}{0} + \binom{u}{1} x + \binom{u}{2} x^2 + \cdots$ τότε η $\sqrt{1-4x}$ γράφεται : $\sqrt{1-4x} = 1 - 2x - 2x^2 - \cdots$ και οι συντελεστές του $x^n$ γίνονται : $C_n = \frac{-1}{2}\left\{\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\ldots\left(\frac{-(2n-3)}{2}\right)}{n!}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\ldots(n-2)\left(\frac{2n-3}{2}\right)(n-1)]}{n!(n-1)!}2^{2n}\right\} =$

$$\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Οπότε $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} x^{n-1} \Rightarrow C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n$ .

Δηλαδή, χρησιμοποιώντας τη γεννήτρια συνάρτηση εξάγουμε για τους αριθμούς Catalan : $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Τα προηγούμενα παραδείγματα αποτελούν ένα μικρό μέρος από τις συναντήσεις με τη συγκεκριμένη ακολουθία. Συνεπώς, μπορεί να υπάρξει μία εναλλαγή μεταξύ αλγεβρικών, γεωμετρικών και συνδυαστικών μεθόδων στην εμφάνιση των αριθμών Catalan.

## Άλλες ιδιότητες των αριθμών Catalan

Συνοψίζοντας την παρουσίαση κάποιων εναλλακτικών χρήσεων των αριθμών Catalan, παρατίθενται και δύο βασικές τους ιδιότητες.

**Θεώρημα : Κάθε αριθμός Catalan $C_n$είναι ακέραιος.**

**Απόδειξη :** Ισχύει ότι $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Από Θεώρημα Hermite[9] για m = 2n έπεται ότι : $\frac{2n-n+1}{MK\Delta(2n+1,n)} \mid \binom{2n}{n} \Rightarrow (n+1) \mid \binom{2n}{n}$. Συνεπώς κάθε αριθμός Catalan είναι ακέραιος.

**Θεώρημα (Koshy – Salmassi, 2004 [4] σελ.330): Οι μοναδικοί πρώτοι αριθμοί Catalan είναι οι $C_2 = 2, C_3 = 5$.**

**Απόδειξη :** Από τον αναδρομικό τύπο του Segner ισχύει ότι $C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}, n \geq 1 \Rightarrow C_{n+1} = \frac{4(n+1)-2}{n+2} C_n, n \geq 0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow (n+2)C_{n+1} = (4n+2)C_n$.

Έστω ότι ο $C_{n_0}, n_0 > 3$είναι πρώτος.

Τότε $\frac{n_0+2}{C_n} < 1 \Rightarrow \frac{4n+2}{C_{n+1}} < 1 \Rightarrow C_{n+1} > 4n+2 \Rightarrow C_n > n+2$ και $C_n \mid (n+2)C_{n+1} \Rightarrow C_n \mid C_{n+1} \Rightarrow C_{n+1} = kC_n$, όπου $k \in \mathbb{N}$. Οπότε $4n+2 = k(n+2)$ δηλαδή $1 \leq k \leq 3, n \leq 4$. Συνεπώς $C_2, C_3$ είναι οι μοναδικοί πρώτοι Catalan.

## Συμπεράσματα

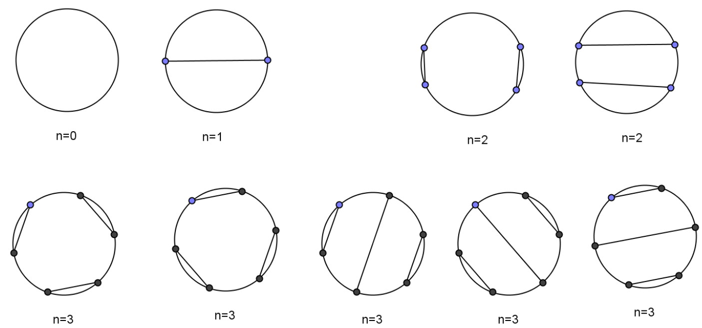
Συνοψίζοντας, τα αναμορφωμένα προγράμματα σπουδών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης ορίζουν τη μελέτη προτύπων ως έναν από τους βασικούς στόχους στην Ελληνική μαθηματική εκπαίδευση. Οι μαθητές από απλά πρότυπα αριθμών στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού (περιττοί, άρτιοι, πρώτοι – σύνθετοι, κλπ) περνούν στην αναγνώριση, περιγραφή και επέκταση αριθμητικών, γεωμετρικών και σύνθετων επαναλαμβανόμενων προτύπων στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού και στις πρώτες του Γυμνασίου. Η συμβολική αναπαράσταση των προτύπων εντάσσεται στο τέλος του Γυμνασίου. Αυτή επιτυγχάνεται με την ανακάλυψη της σχέσης μεταξύ των α-

[9]Θεώρημα Hermite : Αν $m, n \geq 1$τότε $\frac{m-n+1}{MK\Delta\,(m+1,n)} \mid \binom{m}{n}$

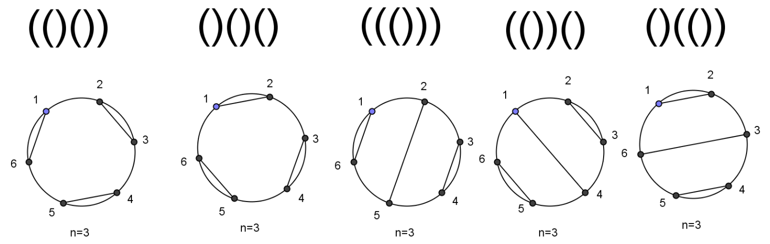
ριθμών (στα αριθμητικά πρότυπα) μίας ακολουθίας με τελικό ζητούμενο ουσιαστικά μία συναρτησιακή σχέση.

Από την άλλη πλευρά στο λύκειο και την ανώτερη εκπαίδευση χρειάζονται ουσιαστικότερες τομές στην πρακτική εφαρμογή στη διδασκαλία, ώστε να γίνει ομαλότερα για τους μαθητές η μετάβαση από την επαγωγική συμπερασματολογία και ανακάλυψη, μέσω διευρεύνησης προτύπων, που θα πρέπει να συμβαίνει στο Γυμνάσιο, σε μία πιο αφηρημένη - συμβολική αναπαράσταση στο Λύκειο και την ανώτερη εκπαίδευση. Όμως, αυτή η διαδικασία πρέπει να έχει νόημα και να προκαλεί το ενδιαφέρον του διδασκομένου, ώστε μέσω της παρατήρησης προτύπων που βρίσκουν εφαρμογές στην καθημερινότητα και τη δοκιμή υποθέσεων, να μπορέσουν να διατυπώσουν πολλαπλές αναπαραστάσεις προτύπων (λεκτικές, συμβολικές, γραφικές) και να εκτιμήσουν αποτελέσματα ή να λύσουν προβλήματα, που, τελικά, είναι η χαρά του να κάνεις μαθηματικά. Πιστεύουμε ότι οι αριθμοί Catalan, μεταξύ άλλων, αποτελούν ένα πρόσφορο παράδειγμα.

Τελειώνοντας, ας χαιρετηθούμε ! Να δώσουμε τα χέρια μας γύρω από το τραπέζι ανά δύο άτομα, αλλά προσοχή να μην τέμνονται οι χειραψίες μας διότι μερικοί πιστεύουν ότι είναι γρουσουζιά. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό; Αν n τα ζεύγη που θα δώσουν τα χέρια τους, τότε η παρακάτω εικόνα φαίνεται να υποδεικνύει ότι αυτό μπορεί να συμβεί κατά $C_n$ τρόπους.




Πράγματι, αν στο παραπάνω σχήμα αριθμήσουμε σε κάθε περίπτωση τα άτομα, τότε το πρόβλημα μπορεί να έρθει σε 1-1 και επί αντιστοιχία με το πρόβλημα των παρενθέσεων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.




Προφανώς, η παραπάνω διαδικασία θα μπορούσε να αποτελεί το κλείσιμο μίας μελέτης των αριθμών Catalan σε μία πραγματική τάξη, ως τελευταίο παράδειγμα αναγνώρισης και εφαρμογής ενός προτύπου.

# Βιβλιογραφία


1. Αργυρόπουλος Η., κ.ά, Ευκλείδια Γεωμετρία,Ο.Ε.Δ.Β. ,2010.

2. Τσικοπούλου Στάμη, Ο ρόλος των προτύπων στη διδασκαλία των μαθηματικών, Ε.Μ.Ε. Πρακτικά 24ου Συνέδριου ,2007.

3. Keith Devlin, Mathematics: the science of patterns,Henry Holt and Company, New York ,1994.

4. Koshy Thomas, Catalan Numbers with Applications, Oxford ,2009.

5. Larcombe Peter, The 18th century Chinese discovery of the Catalan numbers, Mathematical Spectrum 32 5–6 ,1999-2000.

6. Mathematical Database, Generating Functions, http://eng.mathdb.org/ , 2008.

7. Resnik Michael D. , Mathematics as a Science of Patterns, Oxford ,1997.

8. Schoenfeld Alan, Learning to think mathematically : Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics, Mac Millan ,1992.

9. Sloane N.J.A., Handbook of Integer Sequences, Academic Pr ,1973.

10. Stanley Richard P., Enumerative Combinatorics vol.I, Wadsworth & Brooks/Cole , 1986.

11. Stanley Richard P., Enumerative Combinatorics Vol.II, Cambridge , 1999.

12. Wilf Herbert, generatingfunctionology: Third Edition, CRC Press, 2005.

13. Davis Tom, Catalan Numbers, http://www.geometer.org/mathcircles/catalan.pdf, 2010.

14. Internet Encyclopedia of Philosophy, www.iep.utm.edu.