Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου

Ασκήσεις για τον επιμελή μαθητή

Μπάμπης Στεργίου Μάρτιος 2015

Λυμένες Ασκήσεις

1.1 **Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί α, β, γ που είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο με $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|$. Αν οι αριθμοί $\alpha+\beta\gamma$, $\beta+\gamma\alpha$, $\gamma+\alpha\beta$ είναι πραγ-**
ματικοί, να αποδειχθεί ότι:

α) $\alpha\beta\gamma(\beta\gamma+\alpha)=\rho^2(\beta\gamma+\alpha\rho^2)$, όπου $\rho=|\alpha|$.

β) $\alpha\beta\gamma(\gamma-1)=\rho^2(\gamma-\rho^2)$.

γ) $\alpha\beta\gamma=1$.

Λύση

α) Επειδή $\alpha\neq\beta$ και $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|$, είναι $\alpha\beta\gamma\neq 0$. Έτσι $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=\rho>0$, οπότε:

- $\overline{\alpha}=\dfrac{\rho^2}{\alpha}$, $\overline{\beta}=\dfrac{\rho^2}{\beta}$, $\overline{\gamma}=\dfrac{\rho^2}{\gamma}$.

- $\alpha+\beta\gamma\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{\alpha+\beta\gamma}=\alpha+\beta\gamma\Leftrightarrow\overline{\alpha}+\overline{\beta\gamma}=\alpha+\beta\gamma\Leftrightarrow\dfrac{\rho^2}{\alpha}+\dfrac{\rho^2\cdot\rho^2}{\beta\gamma}=\alpha+\beta\gamma\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow\rho^2(\beta\gamma+\alpha\rho^2)=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta\gamma)\Leftrightarrow\alpha\beta\gamma(\beta\gamma+\alpha)=\rho^2(\beta\gamma+\alpha\rho^2)$.

β) Έχουμε κυκλικά τις σχέσεις:

$$\alpha\beta\gamma(\beta\gamma+\alpha)=\rho^2(\beta\gamma+\alpha\rho^2),\quad \alpha\beta\gamma(\gamma\alpha+\beta)=\rho^2(\gamma\alpha+\rho^2\beta)$$

Οι σχέσεις αυτές, με αφαίρεση κατά μέλη, δίνουν:

$$\alpha\beta\gamma(\beta\gamma+\alpha-\gamma\alpha-\beta)=\rho^2(\beta\gamma+\alpha^2\rho-\gamma\alpha-\rho^2\beta)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha\beta\gamma\left[\gamma(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)\right]=\rho^2\left[\gamma(\beta-\alpha)-\rho^2(\beta-\alpha)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha\beta\gamma(\beta-\alpha)(\gamma-1)=\rho^2(\beta-\alpha)(\gamma-\rho^2)\Leftrightarrow$$

$$\overset{\alpha\neq\beta}{\Leftrightarrow}\alpha\beta\gamma(\gamma-1)=\rho^2(\gamma-\rho^2)\qquad(1)$$

γ) Εργαζόμενοι όπως στο (β) (ή κυκλικά) παίρνουμε:

$$\alpha\beta\gamma(\alpha-1)=\rho^2(\alpha-\rho^2)\qquad(2)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (1), (2), οπότε:

$$\alpha\beta\gamma(\gamma-1-\alpha+1)=\rho^2(\gamma-\rho^2-\alpha+\rho^2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha\beta\gamma(\gamma-\alpha)=\rho^2(\gamma-\alpha)\overset{\alpha\neq\gamma}{\Leftrightarrow}\alpha\beta\gamma=\rho^2\qquad(3)$$

Η σχέση αυτή, παίρνοντας μέτρα, δίνει:

$$|\alpha\beta\gamma|=\rho^2\Leftrightarrow|\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\gamma|=\rho^2\Leftrightarrow\rho^3=\rho^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\rho=0\ \text{ή}\ \rho=1)\overset{\rho\neq0}{\Leftrightarrow}\rho=1$$

Άρα, από τη σχέση (3) προκύπτει ότι $\alpha\beta\gamma=1$.

1.2 Δίνονται οι θετικοί αριθμοί a, b, c, η συνάρτηση $f(x)=x^3+a^3+b^3-3abx$, $x>0$, καθώς και οι διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 που έχουν μέτρο 1 και ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{z_1z_2}{(z_1-z_2)^2}+\frac{z_2z_3}{(z_2-z_3)^2}+\frac{z_3z_1}{(z_3-z_1)^2}=-1$$

Να αποδειχθεί ότι:

α) $\frac{z_1z_2}{(z_1-z_2)^2}=-\frac{1}{|z_1-z_2|^2}$ **και**

$$|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3-z_1|^2=3\left(|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2\right)-|z_1+z_2+z_3|^2.$$

β) $|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3-z_1|^2\le 9$.

γ) Η συνάρτηση f έχει ελάχιστο, το οποίο είναι μάλιστα μη αρνητικό.

δ) $a^3+b^3+c^3\ge 3abc$ και $x+y+z\ge 3\cdot\sqrt[3]{xyz}$ για κάθε x, y, $z>0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $a=b=c$ και $x=y=z$ αντίστοιχα.

ε) Οι εικόνες των μιγαδικών z_1 , z_2 , z_3 σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

Λύση

α) Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\frac{z_1z_2}{(z_1-z_2)^2}=-\frac{1}{|z_1-z_2|^2}$, οπότε αν $z_1-z_2=w_1$, τότε:

$$\frac{z_1z_2}{w_1^2}=-\frac{1}{|w_1|^2}\Leftrightarrow\frac{z_1z_2}{w_1^2}=-\frac{1}{w_1\overline{w}_1}\Leftrightarrow\frac{z_1z_2}{w_1}=-\frac{1}{\overline{w}_1}\Leftrightarrow z_1z_2\overline{w}_1=-w_1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1z_2(\overline{z}_1-\overline{z}_2)=-z_1+z_2\Leftrightarrow z_1z_2\overline{z}_1-z_1z_2\overline{z}_2=z_2-z_1$$

που ισχύει αφού $|z_1|=|z_2|=1$.

Για το β′ σκέλος εκτελούμε τις πράξεις και στα δύο μέλη.

Άλλος τρόπος

$$\frac{(z_1-z_2)^2}{z_1z_2}=\frac{z_1^2+z_2^2-2z_1z_2}{z_1z_2}=\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}-2=z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2-z_1\overline{z}_1-z_2\overline{z}_2=$$

$$=-(z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)=-|z_1-z_2|^2$$

Επομένως είναι:

$$\frac{z_1 z_2}{(z_1 - z_2)^2} = -\frac{1}{|z_1 - z_2|^2}$$

β) Είναι:

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 =$$

$$= 3\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2\right) - |z_1 + z_2 + z_3|^2 \le 3\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2\right) = 9$$

γ) Είναι $f(x) = x^3 + a^3 + b^3 - 3abx$, $x > 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = 3x^2 - 3ab$$

Επίσης:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{ab}\ ,\quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{ab}\ ,\quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \sqrt{ab}$$

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = \sqrt{ab}$ το:

$$f\left(\sqrt{ab}\right) = \left(\sqrt{ab}\right)^3 + a^3 + b^3 - 3ab\sqrt{ab} = \left(a\sqrt{a} - b\sqrt{b}\right)^2 \ge 0$$

δ) Λόγω του (γ) ισχύει ότι $f(c) \ge 0 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \ge 3abc$, με την ισότητα να ισχύει όταν:

$$a\sqrt{a} = b\sqrt{b} \quad \text{και } c = \sqrt{ab}\text{, δηλαδή όταν } a = b = c$$

Λόγω του προηγουμένου για $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt[3]{y}$, $c = \sqrt[3]{z}$, x, y, $z > 0$ θα ισχύει ότι:

$$x + y + z \ge 3 \cdot \sqrt[3]{xyz}$$

και η ισότητα ισχύει όταν $x = y = z$.

ε) Λόγω του (α) η δοσμένη σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{1}{|z_1 - z_2|^2} + \frac{1}{|z_2 - z_3|^2} + \frac{1}{|z_3 - z_1|^2} = 1$$

Θέτουμε $a=|z_1-z_2|$, $b=|z_2-z_3|$ και $c=|z_3-z_1|$, οπότε οι αριθμοί a, b, c είναι θετικοί και η σχέση γράφεται $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$. Λόγω του (δ) τώρα παίρνουν:

$$a^2+b^2+c^2\geq 3\left(\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right) \quad \text{και} \quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}\right)$$

Επομένως:

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 3\left(\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right)3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}\right)\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\geq 9$$

και αφού λόγω του (β) $a^2+b^2+c^2\leq 9$, τελικά θα είναι $a^2+b^2+c^2=9$.
Έχουμε επομένως ισότητα, δηλαδή $a=b=c$, που σημαίνει ότι το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο.

1.3 Δίνονται οι μιγαδικοί z με την ιδιότητα:

$$\mathbf{(z-3-4i)(\overline{z}-3+4i)+3|z-3-4i|=4}$$

α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων Μ των παραπάνω μιγαδικών z.

β) Να αποδειχθεί ότι $4\leq|z|\leq 6$.

γ) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς με $|z_1-z_2|=2$, να βρεθούν τα μέτρα $\Delta=|z_1+z_2|$ και $E=|z_1+z_2-16i|$.

Λύση

α) Με την πρώτη ματιά βλέπουμε ότι δεν είναι δόκιμο να θέσουμε $z=x+yi$.
Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

$$(z-3-4i)(\overline{z}-3+4i)=(z-3-4i)(\overline{z-3-4i})=|z-3-4i|^2$$

Η δοσμένη σχέση γράφεται:

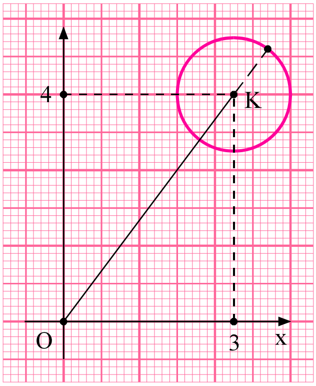
$$|z-3-4i|^2+3|z-3-4i|=4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|z-3-4i|^2+3|z-3-4i|-4=0 \qquad (1)$$

Θέτουμε $|z-3-4i|=\omega>0$, οπότε η εξίσωση γράφεται:

$$\omega^2+3\omega-4=0 \Leftrightarrow (\omega=1 \text{ ή } \omega=-4)$$

Επειδή $\omega=|z-3-4i|\geq 0$, είναι $\omega=1$, δηλαδή $|z-3-4i|=1$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας Μ του z είναι ο κύκλος με κέντρο $K(3,4)$ και ακτίνα $R=1$.



β) Επειδή $OK=\sqrt{3^2+4^2}=5$, γεωμετρικά προκύπτει ότι:

$$OK-R\leq |z|\leq OK+R,\quad R=1$$

Η παραπάνω σχέση δίνει $4\leq |z|\leq 6$.

Αλγεβρικά μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

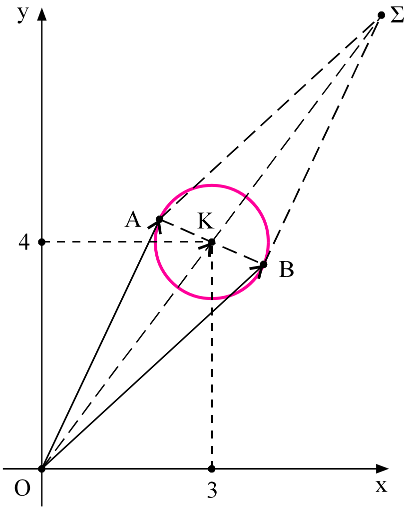
Από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε:

- $1=|z-3-4i|=|z-(3+4i)|\geq |z|-|3+4i|=|z|-5$. Αυτή δίνει:

$$1\geq |z|-5 \Leftrightarrow |z|\leq 6.$$

- $1=|z-3-4i|=|z-(3+4i)|\geq |3+4i|-|z|=5-|z|$. Από την σχέση αυτή παίρνουμε $1\geq 5-|z| \Leftrightarrow |z|\geq 5-1 \Leftrightarrow |z|\geq 4$.

γ) Επειδή $|z_1 - z_2| = 2 = 2R$, οι εικόνες Α, Β των z_1, z_2 είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου C(K,R) με K(3,4) και $R = 1$. Όμως ο $z_1 + z_2$ έχει εικόνα την τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου ΟΑΣΒ και μάλιστα ισχύει ότι $\overrightarrow{O\Sigma} = 2\overrightarrow{OK}$. Άρα:



$$\Delta = |z_1 + z_2| = |\overrightarrow{O\Sigma}| = |2\overrightarrow{OK}| =$$

$$= 2|\overrightarrow{OK}| = 2 \cdot 5 = 10$$

Για τον αριθμό Ε μπορούμε να γράψουμε:

$$E = |z_1 + z_2 - 16i| = 2\left|\frac{z_1 + z_2}{2} - 8i\right| =$$

$$= 2|(3 + 4i) - 8i| = 2|3 - 4i| = 2 \cdot 5 = 10$$

διότι ο μιγαδικός $\dfrac{z_1 + z_2}{2}$ έχει εικόνα το μέσο του ΑΒ, δηλαδή το Κ.

1.4 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$ και $g(x) = e^x - x - 1$.

α) Να μελετηθεί η g ως προς τη μονοτονία.

β) Να λυθεί η εξίσωση $(f \circ g)(x) = 1$.

Λύση

α) Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$. Είναι:

- $g'(x) = (e^x - x - 1)' = e^x - 1$.
- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	↘		↗

Όπως προκύπτει από τον πίνακα προσήμου της g', η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Όταν έχουμε να λύσουμε μια εξίσωση της μορφής $f\left(g(x)\right)=\alpha$, τότε:

- Αναζητούμε μια τιμή x_0 του x, ώστε $f(x_0)=\alpha$.
- Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή $f\left(g(x)\right)=f(x)$, οπότε, αν η f είναι 1-1, οδηγούμαστε στην εξίσωση $g(x)=x$.

β) Με μια προσεκτική παρατήρηση γίνεται φανερό ότι δεν είναι δόκιμο να βρούμε την $f\circ g$, θέτοντας στον τύπο της f όπου x το g(x).
Παρατηρούμε λοιπόν ότι $1=f(0)$, οπότε:

$$f\left(g(x)\right)=1\Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=f(0)$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι η f είναι 1-1, οπότε τότε θα πάρουμε ισοδύναμα $g(x)=0$.
Είναι:

- $f'(x)=\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)'=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$
- $x+\sqrt{x^2+1}>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\geq x+(-x)=0$, δηλαδή $x+\sqrt{x^2+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως η f είναι 1-1, οπότε:

$$f\left(g(x)\right)=f(0)\Leftrightarrow g(x)=0$$

Όμως από το ερώτημα (α) έχουμε ότι:

- Για $x<0$ είναι: $g(x)>g(0)\Leftrightarrow g(x)>0$.
- Για $x>0$ είναι: $g(x)>g(0)\Leftrightarrow g(x)>0$.

Άρα $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και έτσι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$ είναι η $x=0$. Η δοσμένη λοιπόν εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

Επισήμανση

Είναι $f'(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$ *και* $f'(x)=0\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=0$. *Όμως:*

$$x+\sqrt{x^2+1}=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=-x\overset{x\leq 0}{\Leftrightarrow}1=0,\ \textit{αδύνατη}$$

Άρα η f ′ δεν έχει ρίζες, οπότε ως συνεχής θα διατηρεί πρόσημο. Επειδή $f'(0)=1>0$ *, είναι* $f'(x)>0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *.*

1.5 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

β) Να λυθεί η ανίσωση $\int_{x^2}^{x} f(t)dt \ge 0$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $\int_{x+2}^{x+4} f(t)dt > \int_{x^2}^{x^2+2} f(t)dt$.

δ) Να αποδειχθεί ότι $\int_{\alpha^2}^{\alpha^2+3} f(t)dt < \int_{\alpha^2+4}^{\alpha^2+7} f(t)dt$.

Λύση

Πρόκειται για κορυφαίας σημασίας θέμα για κάθε υποψήφιο.

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $D_f=\mathbb{R}$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με:

- $f'(x)=\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)'=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$.
- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=-x \overset{x\le 0}{\Leftrightarrow} x^2+1=x^2 \Leftrightarrow 1=0$, αδύνατη.
- Η f' λοιπόν δεν έχει ρίζες και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί πρόσημο. Επειδή $f'(0)=1>0$, είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Το πρόσημο της f προκύπτει και από την ανισότητα $|x|\ge -x$, ως εξής:

$$x+\sqrt{x^2+1}>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\ge x+(-x)=0$$

Είναι επομένως $x+\sqrt{x^2+1}>0$, οπότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για να βρούμε το σύνολο τιμών της f παρατηρούμε ότι:

- Η f είναι συνεχής.
- Η f είναι γνησίως μονότονη.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0,$
  διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = +\infty$.

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $f(D_f) = (0, +\infty)$.

β) *Πρόκειται για βασικό τρόπο επίλυσης τέτοιων ανισώσεων.* Όπως έχουμε ήδη αποδείξει είναι:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}+x > \sqrt{x^2}+x = |x|+x \geq -x+x = 0$$

δηλαδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ είναι $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$ (και αντιστρόφως), παίρνουμε:

$$\int_{x^2}^{x} f(t)dt \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq x \Leftrightarrow x(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 1]$$

γ) *Εδώ πρόκειται για την άλλη βασική μέθοδο επίλυσης ανισώσεων.* Παρατηρούμε λοιπόν ότι τα άκρα ολοκλήρωσης διαφέρουν κατά 2. Για το λόγο αυτό θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_x^{x+2} f(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι τότε:

- $g(x) = \int_x^{x+2} f(t)dt = \int_0^{x+2} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt$.
- $g'(x) = \left(\int_0^{x+2} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt\right)' = f(x+2)(x+2)' - f(x) = f(x+2) - f(x)$.

Επειδή όμως $x+2 > x$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, συμπεραίνουμε ότι $g'(x) > 0$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα. Έχουμε λοιπόν:

$$\int_{x+2}^{x+4} f(t)dt > \int_{x^2}^{x^2+2} f(t)dt \Leftrightarrow g(x+2) > g(x^2) \Leftrightarrow$$

$$\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} x+2 > x^2 \Leftrightarrow x^2 < x+2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 2)$$

γ) Εργαζόμαστε όπως στο προηγούμενο ερώτημα βασιζόμενοι στη μονοτονία της g. Η ανισότητα γράφεται:

$$g(\alpha^2) < g(\alpha^2+4) \Leftrightarrow \alpha^2 < \alpha^2+4$$

η οποία όμως ισχύει.
Θα μπορούσαμε βέβαια να εργαστούμε και με το Θ.Μ.Τ. ως εξής: Έστω F μια αρχική της f.

- Η F είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[\alpha^2, \alpha^2+3\right]$, $\left[\alpha^2+4, \alpha^2+7\right]$.
- Η F είναι παραγωγίσιμη στα αντίστοιχα ανοικτά διαστήματα.

Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha^2, \alpha^2+3\right)$ και $\xi_2 \in \left(\alpha^2+4, \alpha^2+7\right)$ τέτοια, ώστε:

- $F'(\xi_1) = \dfrac{F(\alpha^2+3)-F(\alpha^2)}{\alpha^2+3-\alpha^2} = \dfrac{F(\alpha^2+3)-F(\alpha^2)}{3} = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_{\alpha^2}^{\alpha^2+3} f(t)dt$
- $F'(\xi_2) = \dfrac{F(\alpha^2+7)-F(\alpha^2+4)}{(\alpha^2+7)-(\alpha^2+4)} = \dfrac{F(\alpha^2+7)-F(\alpha^2+4)}{3} = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_{\alpha^2+4}^{\alpha^2+7} f(t)dt$.

Αλλά $F'(x) = f(x)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή $\xi_1 < \xi_2$ (καθόσον $\alpha^2+3 < \alpha^2+4$) παίρνουμε $F'(\xi_1) < F'(\xi_2)$, οπότε προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα.

1.6 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + e^{2x-4}$.
α) Να οριστεί, αν υπάρχει, η f^{-1}.
β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{f(x)}dx$.

Λύση

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $D_f = \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = \left(1+e^{2x-4}\right)' = 2e^{2x-4} > 0$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως η f είναι και 1-1, οπότε ορίζεται η f^{-1}. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f. Όμως:

- Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

- Η f είναι γνησίως μονότονη.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^{2x-4}\right) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+e^{2x-4}\right) = 1$.

Άρα η f έχει σύνολο τιμών $(1, +\infty)$, οπότε το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $D_{f^{-1}} =$
$= (1, +\infty)$.

β) Ονομάζουμε I το δοσμένο ολοκλήρωμα. Είναι δηλαδή:

$$I = \int_1^3 \frac{1}{f(x)}dx = \int_1^3 \frac{1}{1+e^{2x-4}}dx$$

Θέτουμε $x = 1+3-u = 4-u$, οπότε:

- $I = \int_3^1 \frac{1}{1+e^{2(4-u)-4}}(-du) = \int_1^3 \frac{1}{1+e^{4-2u}}du = \int_1^3 \frac{e^{2u-4}}{e^{2u-4}+1}du$
- $2I = I + I = \int_1^3 \left(\frac{1}{e^{2x-4}} + \frac{e^{2x-4}}{1+e^{2x-4}}\right)du = \int_1^3 1dx = [x]_1^3 = 3-1 = 2$.

Επομένως $2I = 2$, δηλαδή $I = 1$.

Άλλος τρόπος
Είναι:

$$I = \int_1^3 \frac{1}{1+e^{2x-4}}dx = \int_1^3 \frac{e^{-2x+4}}{e^{-2x+4}+1}dx = -\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{\left(e^{-2x+4}+1\right)'}{e^{-2x+4}+1}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\ln\left(e^{-2x+4}+1\right)\right]_1^3 = -\frac{1}{2}\ln(e^{-2}+1) + \frac{1}{2}\ln(e^2+1) =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\frac{1+e^2}{e^2} + \frac{1}{2}\ln(e^2+1) = \frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{\frac{1+e^2}{e^2}} = \frac{1}{2}\ln e^2 = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

1.7 Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα:

$$\mathbf{f'(x) + 2xf(x) = x^2(3 - f'(x))}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = \frac{1}{2}$. Να αποδειχθεί ότι:

α) $\mathbf{f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}}$**, $x \in \mathbb{R}$.**

β) $\mathbf{\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)}$**.**

γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\mathbf{\int_0^{\alpha^3-\alpha} f(t)dt = \alpha(3\alpha^2 - 1)f(\alpha - \alpha^3)}$$

Λύση

α) Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$f'(x) + 2xf(x) = x^2(3 - f'(x)) \Leftrightarrow f'(x) + 2xf(x) = 3x^2 - x^2f'(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) + \left(x^2\right)' f(x) + x^2f'(x) = 3x^2 \Leftrightarrow f'(x) + \left(x^2f(x)\right)' = \left(x^3\right)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) + x^2f(x) = x^3 + c \qquad (1)$$

Όμως $f(1) = \frac{1}{2}$, οπότε η (1) για $x = 1$ δίνει:

$$f(1) + f(1) = 1 + c \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

Άρα, πάλι από την (1) προκύπτει ότι:

$$f(x) + x^2f(x) = x^3 \Leftrightarrow (1 + x^2)f(x) = x^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3}{1+x^2},$$

$x \in \mathbb{R}$

β) Παρατηρούμε ότι:

- $\dfrac{x^3}{x^2+1}=\dfrac{(x^3+x)-x}{x^2+1}=\dfrac{x(x^2+1)-x}{x^2+1}=x-\dfrac{x}{x^2+1}$.

- $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x-\dfrac{x}{x^2+1}\right)dx=\int_0^1\left(x-\dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1}\right)dx=\left[\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1=$
$=\dfrac{1-\ln 2}{2}$.

γ) Παρατηρούμε ότι $f(-x)=\dfrac{-x^3}{x^2+1}=-f(x)$, οπότε $f(\alpha-\alpha^3)=-f(\alpha^3-\alpha)$. Έτσι:

$$\int_0^{\alpha^3-\alpha} f(t)dt=\alpha(3\alpha^2-1)f(\alpha-\alpha^3)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{\alpha^3-\alpha} f(t)dt+\alpha(3\alpha^2-1)f(\alpha^3-\alpha)=0 \qquad (1)$$

Αν θέσουμε x αντί του α, η σχέση (1) γράφεται:

$$\int_0^{x^3-x} f(t)dt+x(3x^2-1)f(x^3-x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x'\int_0^{x^3-x} f(t)dt+xf(x^3-x)(x^3-x)'=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x'\int_0^{x^3-x} f(t)dt+x\left(\int_0^{x^3-x} f(t)dt\right)'=0\Leftrightarrow\left(x\int_0^{x^3-x} f(t)dt\right)'=0$$

Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση $h(x)=x\int_0^{x^3-x} f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$.

- Η h είναι συνεχής στο [0,1] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, αφού η συνάρτηση $\varphi(x)=\int_0^{x^3-x} f(t)dt$ έχει παράγωγο $f(x^3-x)(3x^2-1)$, οπότε είναι συνεχής.

- Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=\int_0^{x^3-x} f(t)dt + x(3x^2-1)f(x^3-x)$ (2).
- $h(0)=0=h(1)$.

Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\alpha\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$h'(\alpha)=0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \int_0^{\alpha^3-\alpha} f(t)dt + \alpha(3\alpha^2-1)f(\alpha^3-\alpha)=0$$

που είναι η ζητούμενη σχέση (1).

1.8 **Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln 2x-\ln(x^2+1)$, $x>0$.**

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το πρόσημό της.

β) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_1^x f(t)dt$ είναι γνησίως φθίνουσα και να βρεθεί το πρόσημό της.

γ) Αν $\alpha>1$, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση:

$$\frac{\left(F(\alpha)+(1-\alpha)f(\alpha)\right)x^5}{x-1}+\frac{(\alpha-1)(x+1)^2}{x-3}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,3).

Λύση

α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $A=(0,+\infty)$ με:

$$f'(x)=\left(\ln 2x-\ln(x^2+1)\right)'=\frac{1}{2x}\cdot 2-\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x=$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{x^2+1-2x^2}{x(x^2+1)}=\frac{1-x^2}{x(x^2+1)}$$

x	0		1		$+\infty$
f΄(x)		+	0	−	
f(x)		− ↗		↘ −	

Έτσι, η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1] και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Το $f(1)=0$ είναι ολικό μέγιστο, οπότε $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Πιο συγκεκριμένα, είναι $f(x)<0$ για $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ και

$f(1)=0$.

β) Η F έχει πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$ αφού $D_f=(0,+\infty)$ και $1\in D_f$. Είναι:

$$F'(x)=\left(\int_1^x f(t)dt\right)'=f(x)\,,\ x>0$$

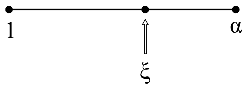
Είναι $F'(x)=f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ και η F είναι συνεχής στο 1. Έτσι η F είναι γνησίως φθίνουσα. Αλλά $F(1)=0$, οπότε το πρόσημο της F φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$-$	
$F(x)$		$\searrow$ $+$	0	$\searrow$ $-$	

γ) Επειδή η εξίσωση δεν ορίζεται στα άκρα 1, 3 του διαστήματος [1,3], απαλείφουμε πρώτα τους παρονομαστές και οδηγούμαστε στη συνάρτηση:

$$g(x)=(x-3)\big(F(\alpha)+(1-\alpha)f(\alpha)\big)x^5+(x-1)(\alpha-1)(x+1)^2\,,\ x>0$$

- Η g είναι συνεχής στο [1,3] ως πολυωνυμική.
- $g(3)=2(\alpha-1)\cdot 3^2=18(\alpha-1)>0$, αφού $\alpha>1$.
- $g(1)=-2\big(F(\alpha)+(1-\alpha)f(\alpha)\big)$. Επειδή $F(\alpha)<0$, $1-\alpha<0$ και $f(\alpha)<0$ το πρόσημο της παρένθεσης δεν είναι προφανές. Για το λόγο αυτό επικαλούμαστε το Θ.Μ.Τ. Η F είναι συνεχής στο [1,α] και παραγωγίσιμη στο (1,α). Σύμφωνα λοιπόν με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(1,\alpha)$ τέτοιο ώστε:



$$F'(\xi)=\frac{F(\alpha)-F(1)}{\alpha-1}=\frac{F(\alpha)}{\alpha-1} \qquad (1)$$

Όμως $F'(\xi)=f(\xi)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Έτσι, αφού $1<\xi<\alpha$ παίρνουμε:

$$f(\xi)>f(\alpha)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\frac{F(\alpha)}{\alpha-1}>f(\alpha)\overset{\alpha>1}{\Leftrightarrow}F(\alpha)-(\alpha-1)f(\alpha)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(\alpha)+(1-\alpha)f(\alpha)>0$$

Είναι λοιπόν $g(1)<0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $g(x)=0$, άρα και η αρχική εξίσωση, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1,3).

1.9 Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο που ικανοποιεί τη σχέση $2f(x)+\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{f(x)}=\int_1^x e^{f(t)}f'(t)\left(t+\frac{1}{t}\right)dt+2$, για κάθε $x>0$.

Να αποδειχθεί ότι:

α) $f(x)=\ln\frac{2x}{x^2+1}$, $x>0$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) $\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt\le\int_1^x tf(t)dt$, για κάθε $x>0$.

Λύση

α) Από τη δοσμένη σχέση, παραγωγίζοντας παίρνουμε:

$$2f'(x)+\left(x+\frac{1}{x}\right)'e^{f(x)}+\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{f(x)}f'(x)=e^{f(x)}f'(x)\left(x+\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f'(x)+\left(x+\frac{1}{x}\right)'e^{f(x)}=0\Leftrightarrow 2f'(x)e^{-f(x)}+\left(x+\frac{1}{x}\right)'=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)e^{-f(x)}=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)'\Leftrightarrow \left(e^{-f(x)}\right)'=\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)'\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-f(x)}=\frac{x^2+1}{2x}+c \quad (1)$$

Για $x=1$ η δοσμένη σχέση δίνει:

$$2f(1)+2e^{f(1)}=2 \Leftrightarrow f(1)+e^{f(1)}=1 \qquad (2)$$

Αν $g(x)=x+e^{x}-1$, τότε $g'(x)=1+e^{x}>0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η g είναι 1-1. Επομένως από την (2) έχουμε:

$$f(1)+e^{f(1)}=1 \Leftrightarrow f(1)+e^{f(1)}-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g\big(f(1)\big)=0 \Leftrightarrow g\big(f(1)\big)=g(0) \Leftrightarrow f(1)=0$$

Η σχέση (1) για $x=1$ δίνει:

$$e^{-f(1)}=1+c \Leftrightarrow 1=1+c \Leftrightarrow c=0$$

Άρα από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$e^{-f(x)}=\frac{x^2+1}{2x} \Leftrightarrow e^{f(x)}=\frac{2x}{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\ln\frac{2x}{x^2+1},$$

$x>0$

β) Η $f(x)=\ln\frac{2x}{x^2+1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $A=(0,+\infty)$ με:

$$f'(x)=\left(\ln\frac{2x}{x^2+1}\right)'=\frac{x^2+1}{2x}\cdot\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'=$$

$$=\frac{x^2+1}{2x}\cdot\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2-2x^2}{2x(x^2+1)}=\frac{1-x^2}{x(x^2+1)}$$

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$. Το πρόσημο της $f'(x)$ ταυτίζεται με το πρόσημο του $1-x^2$ και φαίνεται στον διπλανό πίνακα. Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1], γνησίως

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$ ↗		↘ $-$	

φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και το $f(1) = \ln 1 = 0$ είναι ολικό μέγιστο της f.

γ) Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt \le \int_1^x tf(t)dt\,,\ x > 0 \qquad (3)$$

t	x	x^2
u	1	x

Θέτουμε $\frac{t}{x} = u$, οπότε $t = xu$ και $dt = xdu$. Έτσι:

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt = \int_1^x xf(u)du$$

Η σχέση λοιπόν (3) γίνεται ισοδύναμα:

$$x\int_1^x f(u)du \le \int_1^x tf(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\int_1^x f(u)du - \int_1^x tf(t)dt \le 0 \qquad (4)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x\int_1^x f(u)du - \int_1^x tf(t)dt$, $x > 0$. Η h είναι παραγωγίσιμη με:

- $h'(x) = \left(x\int_1^x f(u)du - \int_1^x tf(t)dt\right)' = \int_1^x f(u)du + xf(x) - xf(x) = \int_1^x f(u)du$.
- $h''(x) = f(x)$, $x > 0$.

Αλλά $f(x) \le f(1) = 0$ με την ισότητα μόνο για $x = 1$. Άρα η h' είναι γνησίως φθίνουσα. Έτσι:

- Για $x < 1$ είναι $h'(x) > h'(1) = 0$, δηλαδή $h'(x) > 0$.
- Για $x > 1$ είναι $h'(x) < h'(1) = 0$, δηλαδή $h'(x) < 0$.

x	0		1		+∞
h´´(x)		−	0	−	
h´(x)		↘ +	0	− ↘	
h(x)		↗	0	↘	

Άρα η h παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, οπότε:

$$h(x) \le h(1) \Leftrightarrow x\int_1^x f(u)du - \int_1^x tf(t)dt \le 0$$

1.10 Έστω f συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, $f(0)=1$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x=-t$, $x=t$ είναι ίσο με $\left|f(t)-e^{-t}\right|$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^{1} \frac{3x^2}{f(x)+1}dx$.

γ) Αν $g(x)=f\left(\sqrt{x}\right)$, να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζει ο άξονα x′x, η γραφική παράσταση της g και οι ευθείες $x=0$, $x=1$.

Λύση

α) Η f είναι συνεχής και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο και αφού $f(0)=1>0$, θα είναι $f(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $g(x)=f(x)e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι: Για κάθε x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1>x_2$ προκύπτει $f(x_1)>f(x_2)$ και $e^{x_1}>e^{x_2}$. Έτσι, πολλαπλασιάζοντας τις ανισότητες αυτές κατά μέλη (αφού όλοι οι όροι είναι θετικοί) παίρνουμε:

$$f(x_1)e^{x_1}>f(x_2)e^{x_2} \Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$$

Έτσι για $x \ge 0$ έχουμε:

$$g(x) \ge g(0) \Leftrightarrow f(x)e^x \ge 1 \Leftrightarrow f(x) \ge e^{-x}$$

και για $x<0$ έχουμε:

$$g(x) < g(0) \Leftrightarrow f(x)e^x < 1 \Leftrightarrow f(x) < e^{-x}$$

- Αν $t \ge 0$, τότε το εμβαδόν είναι ίσο με $E=\int_{-t}^{t} f(x)dx$ και αφού $f(t)>e^{-t}$, θα έχουμε $\int_{-t}^{t} f(x)dx = f(t)-e^{-t}$ για κάθε $t \ge 0$.

- Αν $t<0$, τότε το εμβαδόν είναι ίσο με $E=\int_t^{-t} f(x)dx$ και αφού $f(t)<e^{-t}$, θα έχουμε $\int_t^{-t} f(x)dx = e^{-t}-f(t) \Leftrightarrow \int_{-t}^{t} f(x)dx = f(t)-e^{-t}$ για κάθε $t<0$

Έτσι $\int_{-t}^{t} f(x)dx = f(t)-e^{-t}$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Επομένως, η παραπάνω σχέση δίνει:

$$f(t)=\int_{-t}^{t} f(x)dx + e^{-t} \Leftrightarrow f(t)=\int_0^{t} f(x)dx - \int_0^{-t} f(x)dx + e^{-t} \text{ για κάθε } t\geq 0$$

και αφού το 2ο μέλος είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, η f είναι παραγωγίσιμη. Άρα:

$$f'(t)=f(t)+f(-t)-e^{-t} \qquad (1)$$

για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Επομένως είναι και:

$$f'(-t)=f(-t)+f(t)-e^{t}$$

για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$f'(t)-f'(-t)=e^{t}-e^{-t} \Leftrightarrow \left(f(t)+f(-t)\right)'=\left(e^{t}+e^{-t}\right)'$$

Έτσι, υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$, ώστε:

$$f(t)+f(-t)=e^{t}+e^{-t}+c$$

για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Αυτή δίνει $f(0)+f(-0)=2+c \overset{f(0)=1}{\Longleftrightarrow} c=0$, δηλαδή τελικά:

$$f(t)+f(-t)=e^{t}+e^{-t} \text{ για κάθε } t\in\mathbb{R}.$$

Επομένως από την (1) έχουμε:

$$f'(t)=e^{t}+e^{-t}-e^{-t}=e^{t}$$

Έτσι υπάρχει $c_1\in\mathbb{R}$, ώστε $f(t)=e^{t}+c_1$ και αφού $f(0)=0$, είναι $f(t)=e^{t}$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Αποδείξαμε επομένως ότι $f(x)=e^{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^{1}\frac{3x^2}{e^x+1}dx$. Θέτουμε $u=-x$, οπότε $dx=-du$. Για $x=-1$ έχουμε $u=1$ και για $x=1$ είναι $u=-1$. Άρα:

- $$I=\int_{-1}^{1}\frac{3x^2}{e^x+1}dx=\int_{1}^{-1}\frac{-3(-u)^2}{e^{-u}+1}du=\int_{-1}^{1}\frac{3u^2}{\frac{1}{e^u}+1}du=\int_{-1}^{1}\frac{3u^2e^u}{e^u+1}du=$$
$$=\int_{-1}^{1}\frac{3x^2e^x}{e^x+1}dx=J.$$

- $$I+J=\int_{-1}^{1}\frac{3x^2}{e^x+1}dx+\int_{-1}^{1}\frac{3x^2e^x}{e^x+1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{3x^2(e^x+1)}{e^x+1}dx=\int_{-1}^{1}3x^2dx=\left[x^3\right]_{-1}^{1}=2.$$

Άρα $2I=2$, οπότε $I=J=1$.

γ) Είναι $g(x)=e^{\sqrt{x}}>0$, οπότε $E_1=\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$. Θέτουμε $u=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=u^2$, $dx=2udu$, $x=0\Leftrightarrow u=0$, $x=1\Leftrightarrow u=1$. Άρα:

$$E_1=\int_0^1 2ue^udu=\left[2ue^u\right]_0^1-\int_0^1 2e^udu=2e-\left[2e^u\right]_0^1=2 \text{ τ.μ.}$$

Σχόλια

α) Η συνάρτηση $g(t)=f(t)-e^{-t}$ είναι γνησίως αύξουσα (με τον ορισμό), οπότε βρίσκεται το πρόσημό της , αφού $g(0)=0$.

β) Στη σχέση $\int_{-t}^{t}f(x)dx=f(t)-e^{-t}$ (*) μπορούμε να εναλλάξουμε το t με το $-t$ και να πάρουμε:

$$\int_{t}^{-t}f(x)dx=f(-t)-e^{t}\Leftrightarrow-\int_{-t}^{t}f(x)dx=f(-t)-e^{t}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_{-t}^{t}f(x)dx=-f(-t)+e^{t} \qquad (**)$$

Οι σχέσεις (*),(**) δίνουν:

$$f(t)-e^{-t}=-f(-t)+e^{t}\Leftrightarrow f(t)+f(-t)=e^{t}+e^{-t} \qquad (2)$$

Αλλά από την (1) έχουμε:

$$f(t)+f(-t)=f'(t)+e^{-t}$$

Από αυτή και την (2) παίρνουμε:

$$f'(t)+e^{-t}=e^{t}+e^{-t} \Leftrightarrow f'(t)=e^{t}\text{, κ.λπ.}$$

1.11 Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ όχι σταθερή πολυωνυμική συνάρτηση με $f'(1)=0$. Η συνάρτηση $g(x)=f(x)f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=t$ είναι ίσο με $\frac{1}{6}|g(t)|$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $A=\int_{-2}^{2}\frac{f(|x|)}{2^x+1}dx$.

Λύση

α) Επειδή $g(1)=0$ και η συνάρτηση $g(x)=f(x)f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, είναι $g(x)>0$ για $x>1$ και $g(x)<0$ για $x<1$.

Έτσι το εμβαδόν του δοσμένου χωρίου δίνεται από τις σχέσεις:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g(x)	$-$	0	$+$

- $\int_1^t f(x)dx=\frac{1}{6}g(t)=\frac{1}{6}f(x)f'(x)$, $\quad t\geq 1$ (1)
- $\int_t^1 f(x)dx=-\frac{1}{6}g(t)=-\frac{1}{6}f(t)f'(t)$, $t<1$ (2).

Η δεύτερη σχέση δίνει:

$$-\int_1^t f(x)dx=-\frac{1}{6}f(t)f'(t)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_1^t f(x)dx=\frac{1}{6}f(t)f'(t)\text{, } t<1 \qquad (3)$$

Έτσι από τις σχέσεις (1) και (3) παίρνουμε ότι:

$$\int_1^t f(x)dx = \frac{1}{6}f(t)f'(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R} \qquad (4)$$

Η συνάρτηση f δεν είναι σταθερή, οπότε ας είναι ν ο βαθμός του πολυωνύμου f(t). Το πολυώνυμο $f'(t)$ έχει βαθμό $\nu-1$ και έτσι το πολυώνυμο $g(t)=f(t)f'(t)$ έχει βαθμό $\nu+(\nu-1)=2\nu-1$. Από την άλλη, το πολυώνυμο $\int_1^t f(x)dx$ έχει βαθμό $\nu+1$, οπότε από την (4) πρέπει $\nu+1=2\nu-1 \Leftrightarrow \nu=2$.

Άρα $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$ και επειδή $f'(x)=2\alpha x+\beta$, η (4) δίνει:

$$\left[\frac{\alpha x^3}{3}+\frac{\beta x^2}{2}+\gamma x\right]_1^t = \frac{1}{6}(\alpha t^2+\beta t+\gamma)(2\alpha t+\beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha t^3}{3}+\frac{\beta t^2}{2}+\gamma\right)-\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}+\gamma\right)=\frac{1}{6}(2\alpha^2 t^3+\alpha\beta t^2+2\alpha\beta t^2+\beta^2 t+2\alpha\gamma t+\beta\gamma) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha t^3+3\beta t^2+6\gamma t-(2\alpha+3\beta+6\gamma)=2\alpha^2 t^3+3\alpha\beta t^2+(\beta^2+2\alpha\gamma)t+\beta\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha=2\alpha^2 \\ 3\beta=3\alpha\beta \\ 6\gamma=\beta^2+2\alpha\gamma \\ 2\alpha+3\beta+6\gamma=-\beta\gamma \end{cases} \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta^2=4\gamma \\ 3\beta+6\gamma=-2-\beta\gamma \end{cases}$$

Επειδή $\gamma=\frac{\beta^2}{4}$, η τελευταία δίνει:

$$3\beta+6\frac{\beta^2}{4}+2+\beta\cdot\frac{\beta^2}{4}=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \beta^3+6\beta^2+12\beta+8=0 \Leftrightarrow (\beta+2)^3=0 \Leftrightarrow \beta=-2$

Επομένως $\alpha=1$, $\beta=-2$ και $\gamma=\dfrac{\beta^2}{4}=1$, οπότε $f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$.

β) Επειδή $f(x)=(x-1)^2$ είναι $f(|x|)=(|x|-1)^2$. Θέτουμε $x=-u$, οπότε:

- $A=\displaystyle\int_2^{-2}\frac{f(|-u|)}{2^{-u}+1}(-du)=\int_{-2}^{2}\frac{f(|u|)2^u}{1+2^u}du=\int_{-2}^{2}\frac{f(|x|)2^x}{1+2^x}dx$.
- $2A=A+A=\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{f(|x|)}{1+2^x}dx+\int_{-2}^{2}\frac{2^x f(|x|)}{1+2^x}dx=\int_{-2}^{2}\frac{(1+2^x)f(|x|)}{1+2^x}dx=$

$=\displaystyle\int_{-2}^{2}f(|x|)dx=\int_{-2}^{0}f(|x|)dx+\int_0^2 f(|x|)dx=\int_{-2}^{0}(x^2+2x+1)dx+$

$+\displaystyle\int_0^2(x^2-2x+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^2=0-\left(-\frac{8}{3}+4-2\right)+$

$+\left(\dfrac{8}{3}-4+2\right)-0=\dfrac{8}{3}+2+\dfrac{8}{3}-2=\dfrac{16}{3}$.

Άρα $2A=\dfrac{16}{3}$, οπότε τελικά θα είναι $A=\dfrac{8}{3}$.

1.12 Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την g θετική και την f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^x g(t)dt>0$ για κάθε $x>0$.

β) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{1}{\int_0^x g(t)dt}\int_0^x f(t)g(t)dt$, $x\neq 0$, είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(0,+\infty)$ και $(-\infty,0)$.

γ) Αν $\alpha<0<\beta$, να συγκριθούν οι αριθμοί h(α) και h(β).

Λύση

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x)=\int_0^x g(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$. Η G είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, διότι η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επομένως:

$$G'(x)=g(x)>0\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

Άρα η G είναι γνησίως αύξουσα. Αυτό μας εξασφαλίζει ότι με $x>0$, θα ισχύει:

$$G(x)>G(0)\Leftrightarrow\int_0^x g(t)dt>0$$

β) Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς, οι συναρτήσεις $\int_0^x f(t)g(t)dt$ και $\int_0^x g(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Έτσι η συνάρτηση h(x) είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με:

$$h'(x)=\frac{f(x)g(x)\int_0^x g(t)dt-g(x)\int_0^x f(t)g(t)dt}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)^2}=$$

$$=\frac{g(x)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)^2}\int_0^x\left[f(x)g(t)-f(t)g(t)\right]dt=$$

$$=\frac{g(x)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)^2}\int_0^x g(t)\left[f(x)-f(t)\right]dt \qquad (1)$$

i) Έστω $x>0$. Η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε με $0\le t<x$ παίρνουμε:

$$f(t)<f(x)\Leftrightarrow f(x)-f(t)>0$$

Επιπλέον $g(t)>0$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$ και έτσι για τη συνάρτηση $\varphi(t)=g(t)\left[f(x)-f(t)\right]$ ισχύει ότι:

- η φ είναι συνεχής στο [0,x].
- $\varphi(t)>0$ για κάθε $t\in[0,\ x)$.

- $\varphi(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [0, x]$.

Επειδή λοιπόν $\varphi(t) \geq 0$ στο [0,x] και η φ δεν είναι παντού ίση με μηδέν στο [0,x], θα είναι $\int_0^x \varphi(t)dt > 0$ για κάθε $x > 0$. Επομένως η σχέση (1) μας δίνει $h'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.
ii) Έστω $x < 0$. Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι αν $x < t \leq 0$, τότε:

$$f(x) - f(t) < 0 \quad \text{και} \quad g(t)\left[f(x) - f(t)\right] < 0$$

δηλαδή $\varphi(t) < 0$. Άρα, όπως και στην πρώτη περίπτωση συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_x^0 \varphi(t)dt < 0 \Leftrightarrow -\int_0^x \varphi(t)dt < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x \varphi(t)dt > 0$$

και έτσι $h'(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$. Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα και στο $(-\infty, 0)$.

γ) Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Επομένως:

- Για $x < 0$ είναι $h(x) < \lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)g(x)}{g(x)} =$

  $= \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$, διότι οι όροι του κλάσματος είναι συνεχείς, ως παραγωγίσιμες συναρτήσεις, οπότε έχουμε απροσδιοριστία $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ και η f είναι συνεχής στο 0, οπότε $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

- Για $x > 0$ είναι $h(x) > \lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.

Άρα με $\alpha < 0$ είναι $h(\alpha) < f(0)$ και με $0 < \beta$ είναι $f(0) < h(\beta)$. Επομένως έχουμε $h(\alpha) < h(\beta)$.

1.13 Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και περιττή συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ln\left(1+e^{f(x)}\right)dx=\int_{0}^{1} f^2(x)dx$$

Λύση

Αφού η f είναι περιττή συνάρτηση, θα ισχύει $f(-x)=-f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ (1)

Έστω:

x	−1	1
u	1	−1

$$I=\int_{-1}^{1} f(x)\ln\left(1+e^{f(x)}\right)dx$$

Θέτουμε $x=-u$, οπότε $dx=-du$. Έτσι:

$$I=\int_{-1}^{1} f(x)\ln\left(1+e^{f(x)}\right)dx=\int_{1}^{-1} f(-u)\ln\left(1+e^{f(-u)}\right)(-du)=$$

$$=-\int_{-1}^{1} f(u)\ln\left(1+e^{-f(u)}\right)du=-\int_{-1}^{1} f(x)\ln\frac{1+e^{f(x)}}{e^{f(x)}}dx=$$

$$=-\int_{-1}^{1}\left[f(x)\ln\left(e^{f(x)}+1\right)\right]dx-\int_{-1}^{1} f(x)\ln e^{f(x)}dx=-I+\int_{-1}^{1} f^2(x)dx$$

Έτσι έχουμε οδηγηθεί στη σχέση:

$$I=-I+\int_{-1}^{1} f^2(x)dx\Leftrightarrow 2I=\int_{-1}^{1} f^2(x)dx\Leftrightarrow I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f^2(x)dx \quad (2)$$

Στο σημείο αυτό γράφουμε:

$$A=\int_{-1}^{1} f^2(x)dx=\int_{-1}^{0} f^2(x)dx+\int_{0}^{1} f^2(x)dx \quad (3)$$

Θέτουμε στο α′ ολοκλήρωμα $x=-u$, οπότε:

$$\int_{-1}^{0} f^2(x)dx=\int_{1}^{0} f^2(-u)d(-u)=$$

$$=\int_{0}^{1}\left(-f(u)\right)^{2}du=\int_{0}^{1}f^{2}(x)dx$$

Έτσι, από τη σχέση (3) παίρνουμε:

$$A=\int_{-1}^{0}f^{2}(x)dx+\int_{0}^{1}f^{2}(x)dx=$$

$$=\int_{0}^{1}f^{2}(x)dx+\int_{0}^{1}f^{2}(x)dx=2\int_{0}^{1}f^{2}(x)dx$$

Άρα, τελικά, η σχέση (2) δίνει:

$$I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f^{2}(x)dx=\frac{1}{2}\cdot 2\int_{0}^{1}f^{2}(x)dx=\int_{0}^{1}f^{2}(x)dx$$

Σημειώνουμε ότι με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύουμε γενικά ότι:

- Αν η f είναι άρτια, τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx=2\int_{0}^{\alpha}f(x)dx$.
- Αν η f είναι περιττή, τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx=0$.

Αναφέρουμε επίσης ότι στο α′ σκέλος θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή – βασική μέθοδο:

$$2I=I+I=\int_{-1}^{1}f(x)\ln\left(1+e^{f(x)}\right)dx-\int_{-1}^{1}f(x)\ln\frac{1+e^{f(x)}}{e^{f(x)}}dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}f(x)\left[\ln\left(1+e^{f(x)}\right)-\ln\frac{1+e^{f(x)}}{e^{f(x)}}\right]dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}f(x)\ln\frac{e^{f(x)}\left(1+e^{f(x)}\right)}{1+e^{f(x)}}dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}f(x)\ln e^{f(x)}dx=\int_{-1}^{1}f^{2}(x)dx$$

1.14 **Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$, $f'(x)>0$ και:**

$$f(x)+\ln f'(x)=e^{x^2}+x^2+\ln 2x\text{, για κάθε } x>0$$

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=e^{x^2}$, $x\geq 0$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς τα ακρότατα, τα κοίλα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδειχθεί ότι:

i) $\dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha}<\dfrac{f(\beta)-1}{\beta}$ για κάθε α, $\beta>0$ με $\alpha<\beta$.

ii) $\displaystyle\int_1^x\frac{1}{f(t)}dt<\frac{1}{2e}$ για κάθε $x>1$.

δ) Να υπολογιστεί το όριο $A=\lim\limits_{x\to 0^+} xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

ε) Να αποδειχθεί ότι $2\int_0^{\alpha} f(t)dt\leq \alpha\left(1+f(\alpha)\right)$ για κάθε $\alpha\geq 0$.

Λύση

α) $f(x)+\ln f'(x)=e^{x^2}+x^2+\ln 2x \Leftrightarrow \ln e^{f(x)}+\ln f'(x)=e^{x^2}+x^2+\ln 2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln e^{f(x)}\cdot f'(x)=e^{x^2}+x^2+\ln 2x \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)'=e^{e^{x^2}+x^2+\ln 2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)'=e^{e^{x^2}}\cdot e^{x^2}\cdot 2x \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)'=e^{e^{x^2}}\left(e^{x^2}\right)'=\left(e^{e^{x^2}}\right)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)}=e^{e^{x^2}}+c$$

Η f είναι συνεχής στο 0, οπότε:

$$\lim_{x\to 0} e^{f(x)}=\lim_{x\to 0}\left(e^{e^{x^2}}+c\right) \Leftrightarrow e^{f(0)}=e+c \Leftrightarrow c=0$$

Άρα $f(x)=e^{x^2}$, $x\geq 0$, αφού αυτή δίνει $f(0)=1$, τιμή που είναι δοσμένη.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	

β) • Είναι $f'(x)=2xe^{x^2}$. Η f είναι γνησίως αύξουσα και το $f(0)=1$ είναι ολικό ελάχιστο.

• Είναι $f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}=2e^{x^2}(1+2x^2)>0$. Άρα η f είναι κυρτή.

Το σύνολο τιμών είναι το $f(A)=[1,+\infty)$, όπου $A=[0,+\infty)$.

γ) i) Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)-1}{x}$. Είναι:

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)+1}{x^2}=\frac{xf'(x)-\big(f(x)-f(0)\big)}{x^2}=$$

$$=\frac{xf'(x)-f'(\xi)(x-0)}{x^2}=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x}>0$$

διότι $\xi\in(0,x)$ και η f' είναι $\uparrow$. (Ή με μελέτη της $h(x)=xf'(x)-f(x)+1$.) Άρα:

$$\alpha<\beta\Leftrightarrow g(\alpha)<g(\beta)$$

ii) Επειδή $t^2\ge 2t-1$, είναι $e^{-t^2}\le e^{1-2t}$. Έτσι:

$$\int_1^x e^{-t^2}dt\le\int_1^x e^{1-2t}dt=-\frac{1}{2}\left[e^{1-2t}\right]_1^x=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(e^{1-2x}-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-e^{1-2x}\right)<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e}=\frac{1}{2e}$$

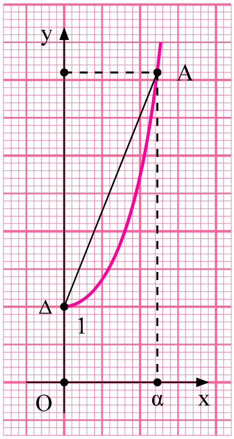
Άλλος τρόπος

Για $x>1$ είναι $\int_1^x e^{-t^2}dt<\int_1^x te^{-t^2}dt=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{e}-e^{-x^2}\right)<\dfrac{1}{2e}$.

δ) $$A=\lim_{x\to0^+}xf\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(xe^{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=2\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x}=$$

$$=2\lim_{x\to0^+}\left(e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}\right)=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty.$$

ε) Είναι:



- (ΔA): $y-f(0)=\dfrac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}(x-0)\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow y=1+\dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha}x$.

- $f(x)\le y_{\Delta A}\Leftrightarrow f(x)\le 1+\dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha}x$, $x\in[0,\alpha]$. Άρα:

$$\int_0^{\alpha} f(t)dt\le\int_0^{\alpha}\left(1+\frac{f(\alpha)-1}{\alpha}t\right)dt=\alpha+\frac{f(\alpha)-1}{\alpha}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\alpha}=$$

$$=\alpha+\frac{f(\alpha)-1}{\cancel{\alpha}}\cdot\frac{\alpha^{\cancel{2}}}{2}=\alpha+\frac{\alpha\left(f(\alpha)-1\right)}{2}=$$

$$=\frac{2\alpha+\alpha f(\alpha)-\alpha}{2}=\frac{\alpha+\alpha f(\alpha)}{2}=\frac{\alpha}{2}\left(1+f(\alpha)\right)$$

1.15 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$\mathbf{f(x)=e^{-\int_1^x f(t)dt},\ x>0}$$

Να αποδειχθεί ότι:

α) η f είναι παραγωγίσιμη.

β) $f'(x)=-f^2(x)$, για κάθε $x>0$.

γ) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, για κάθε $x>0$.

Έστω ότι η εφαπτομένη της C_f στο μεταβλητό της σημείο Μ τέμνει τους άξονες στα σημεία Α και Β. Να αποδειχθεί ότι:

δ) $MA=MB$.

ε) Το τρίγωνο ΟΑΒ έχει σταθερό εμβαδόν, ανεξάρτητο δηλαδή από τη θέση του σημείου Μ.

Λύση

α) Η συνάρτηση του δευτέρου μέλους είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών, αφού η f(t) μέσα στο ολοκλήρωμα είναι συνεχής, οπότε η f(x) είναι παραγωγίσιμη.

β) Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$f'(x) = -e^{-\int_1^x f(t)dt} f(x) \Leftrightarrow f'(x) = -f^2(x) \qquad (1)$$

αφού $e^{-\int_1^x f(t)dt} = f(x)$.

γ) Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει ότι $f(x) \neq 0$, $x > 0$ και από την (1) έχουμε:

$$-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = x' \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = x + c \qquad (2)$$

Από την αρχική παίρνουμε $f(1) = 1$. Με $x = 1$ η (2) δίνει $c = 0$, οπότε:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

δ) Είναι $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M\left(x_0, \frac{1}{x_0}\right)$ με $x_0 > 0$ έχει εξίσωση:

$$y - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{x_0^2}x + \frac{2}{x_0}$$

Με $y = 0$ είναι $x = 2x_0$. Έτσι $A(2x_0, 0)$. Με $x = 0$ είναι $y = \frac{2}{x_0}$, έτσι $B\left(0, \frac{2}{x_0}\right)$. Είναι $(MA) = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}}$ και $(MB) = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}}$, οπότε $MA = MB$.

(Καλύτερα είναι όμως να διαπιστώσουμε ότι το μέσο του ΑΒ είναι το Μ, αφού $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = x_0$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1}{x_0}$.)

ε) $(OAB) = \frac{1}{2}(OA)\cdot(OB) = \frac{1}{2}\cdot 2x_0 \cdot \frac{2}{x_0} = 2$ τ.μ. σταθερό $(x_0 > 0)$.